Universidade de Lisboa

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada

Resolução de problemas no tema Lugares Geométricos:

O papel dos recursos na actividade matemática dos alunos

Andreia Sofia Afonso Esteves

Mestrado em Ensino de Matemática

2010

Universidade de Lisboa

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada

Resolução de problemas no tema Lugares Geométricos:

O papel dos recursos na actividade matemática dos alunos

Andreia Sofia Afonso Esteves

Orientadora: Prof. Doutora Hélia Oliveira

Co-orientadora: Prof. Doutora Suzana Nápoles

Mestrado em Ensino de Matemática

2010

Resumo

Neste relatório apresenta-se um estudo desenvolvido no âmbito da leccionação da unidade Lugares Geométricos, na turma A do 8.º ano da Escola Básica 2, 3 Maria Alberta Menéres. O objecto deste estudo é a resolução de problemas contextualizados na realidade, relativos à unidade referida, centrando-se na compreensão do papel dos recursos na actividade matemática dos alunos. Com este intuito, procurei responder a três questões: Em que medida os alunos mobilizam conceitos e propriedades matemáticos relativos ao tema, na resolução de problemas contextualizados na realidade? Quais as principais dificuldades apresentadas pelos alunos na resolução de problemas relativos ao tema abordado? Quais as potencialidades dos recursos disponíveis na resolução de problemas, em particular, para a escolha da estratégia de resolução pelos alunos?

Os resultados apresentados baseiam-se na análise dos dados obtidos utilizando três métodos: observação com registo áudio, aplicação de um questionário e recolha documental. Esta análise permitiu-me concluir que: as noções de mediatriz de um segmento de recta, circunferência e intersecção de lugares geométricos são reconhecidas e utilizadas adequadamente pelos alunos num grande número de situações; o aspecto mais crítico das dificuldades dos alunos na resolução de problemas é a interpretação, afectando, nomeadamente, a mobilização dos conceitos adequados; e que os recursos utilizados condicionaram a selecção das estratégias de resolução, que parecem ser estimuladas pela utilização de *software* de Geometria dinâmica.

Abstract

This report presents a developed study on the teaching of the theme Lugares Geométricos, in the 8.th grade, class A, of the Escola Básica 2, 3 Maria Alberta Menéres. The purpose of this study is the world context problem solving on that theme, with focus on understanding the role of resources in students' mathematical activity. With this aim, I tried to answer three questions: To what extent students mobilize mathematical concepts and properties related to the topic, in the world context problem solving? What are the main difficulties presented by the students in solving problems related to the topic discussed? What are the potential of the resources available in problem solving, particularly, for the students' choice of resolution strategy?

The results presented are based on analysis of data obtained using three methods: observation with audio recording, administering a questionnaire and documental collection. This analysis led me to conclude that: the notions of bisector of a line segment, circle and intersection of loci are recognized and used appropriately by students in many situations; the most critical aspect of students' difficulties in solving problems is the interpretation, affecting in particular the mobilization of adequate concepts; and that the used resources conditioned the selection of resolution strategies, which seem to be stimulated by the use of dynamic Geometry software.

Índice

Índice de quadros

Índice de figuras

Introdução

O presente trabalho consiste na apresentação de um estudo realizado no âmbito da leccionação, por mim efectuada, da unidade Lugares Geométricos, no 8.º ano de escolaridade, no decorrer do ano lectivo 2009/2010. Este estudo foi desenvolvido com o objectivo de analisar a resolução de problemas contextualizados na realidade na referida unidade, e, em particular, compreender o papel dos recursos na actividade matemática dos alunos.

A resolução de problemas prende a minha atenção desde há muito, pois, enquanto aluna, lembro-me de me sentir envolvida e desafiada em busca de estratégias de resolução deste tipo de tarefas. Recordo-me de utilizar estratégias diferentes das que eram apresentadas pelos meus colegas, o que me levava a questionar as minhas opções. Curiosamente, e pensado, também, no destaque que a resolução de problemas tem nos vários documentos curriculares actuais, neste estudo procurei valorizar este tipo de tarefas, levando os alunos a desenvolver confiança nas suas estratégias e enfrentar as suas dificuldades.

No *Programa de Matemática do 3.º ciclo do Ensino Básico* (1991) são dados exemplos de problemas a propor na referida unidade, sendo alguns destes contextualizados na realidade. Logo, a resolução de problemas incluídos neste contexto surge como uma recomendação programática para a unidade em questão.

Além disso, um dos aspectos realçados nos diferentes documentos curriculares que me parece pertinente no âmbito do estudo da Geometria é a utilização de diferentes recursos na actividade matemática dos alunos. Afinal, são vários os instrumentos que permitem realizar construções geométricas, como material de desenho e *software* de Geometria dinâmica.

Portanto, neste estudo procurei associar dois aspectos importantes na disciplina de Matemática: os problemas contextualizados na realidade e a utilização de diferentes recursos. Procurei, assim, que os alunos contactassem com a Geometria através da resolução de problemas, enquanto compreendiam os conceitos relativos à unidade leccionada, realizando construções geométricas.

Desta forma, tendo em conta o objectivo do estudo, formulei as três questões seguintes:

- Em que medida os alunos mobilizam conceitos e propriedades matemáticos relativos ao tema, na resolução de problemas contextualizados na realidade?
- Quais as principais dificuldades apresentadas pelos alunos na resolução de problemas relativos ao tema abordado?
- Quais as potencialidades dos recursos disponíveis na resolução de problemas, em particular, para a escolha da estratégia de resolução pelos alunos?

No presente trabalho são apresentados diversos capítulos que têm por base as questões formuladas e a unidade didáctica leccionada por mim. Assim, primeiramente surge o capítulo “A resolução de problemas e o ensino da Geometria” em que se abordam os temas considerados na problemática definida, tendo em conta alguma literatura de referência. De seguida, é apresentada “A unidade de ensino” no âmbito da qual foi desenvolvido este estudo, procurando explicar as estratégias adoptadas à luz dos objectivos previstos nos documentos curriculares. No capítulo seguinte surge a explicitação dos “Métodos e procedimentos de recolha de dados” utilizados no decorrer da investigação. No quinto capítulo apresento a “Análise de dados”. Finalmente, procurando responder às questões formuladas, e tendo em conta a literatura consultada, surge o capítulo “Reflexão final”, concluindo a apresentação deste trabalho, em que faço, também, uma reflexão sobre a minha prática lectiva.

A resolução de problemas e o ensino da Geometria

A problemática do estudo que aqui se apresenta foi desenvolvida em função do tema Lugares Geométricos, por mim leccionado no 8.º ano de escolaridade. Esta problemática foca-se na resolução de problemas contextualizados na realidade e na utilização de diversos recursos que possibilitam a realização de construções geométricas, sendo esses os aspectos em que se centra o presente capítulo.

Resolução de problemas

"Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema" (Polya, 2003, p.11). Por isso, se um professor "desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas" dos alunos, "apresentando-lhes problemas adequados aos seus conhecimentos", "poderá despertar neles o gosto pelo pensamento independente e proporcionar-lhes alguns meios para o concretizarem" (Polya, 2003, idem).

Um problema é, segundo Pires (2001, p. 141), "uma tarefa com um objectivo bem definido e um método de resolução desconhecido". Já de acordo com Ponte (2005) um problema é uma tarefa fechada com elevado desafio, sendo fechada porque nela "é claramente dito o que é dado e o que é pedido" (pp. 7, 8), e desafiante devido à percepção de dificuldade que tem quem a resolve. Logo, estamos perante um problema quando sabemos quais os dados a utilizar e o tipo de resposta a obter, mas não conhecemos o caminho a percorrer entre estes dois extremos.

De acordo com Polya (2003), encontrar este caminho envolve, preferencialmente, a passagem por quatro fases: *compreensão do problema*, *estabelecimento de um plano*, *execução do plano* e *verificação*. Para resolver um problema, em primeiro lugar é necessário compreendê-lo, isto é, interpretar o enunciado identificando os dados, as condições e o que se pretende determinar. Em segundo lugar, surge o *estabelecimento de um plano*, a formulação de uma estratégia e a escolha dos procedimentos a executar para obter a solução. Nesta etapa há que encontrar as relações entre o que se procura e os dados, recorrendo à experiência passada, aos conhecimentos adquiridos e, por vezes, à formulação de variações do problema, nomeadamente, criando problemas mais simples. De seguida, é preciso colocar o plano em prática, efectuando todos os seus passos com atenção à sua correcção. Por fim, é essencial examinar a solução obtida revendo toda a resolução. Assim, além de comprovar ou não a adequação da mesma, consolidam-se conhecimentos e desenvolve-se a capacidade de resolver problemas (Polya, 2003).

Todas estas fases contribuem para que a resolução de problemas seja uma actividade relevante na sala de aula de Matemática, uma vez que através delas os alunos são levados a desenvolver a sua autonomia e a capacidade de pensar matematicamente (Pires, 2001), potencializando a vontade de progredir e aprofundar o seu envolvimento na Matemática (NCTM, 2008). Contudo, Polya (2003) destaca uma dessas fases como sendo a principal e mais complexa: o estabelecimento de um plano. Pois, ao recorrerem aos conhecimentos pré-adquiridos, para encontrar uma estratégia que conduza à solução, os alunos estão a explorá-los e desenvolvê-los, o que torna a resolução de problemas um meio propício à aquisição de novos conhecimentos matemáticos (NCTM, 2008).

Percorrer estas várias fases em busca de um caminho que conduza à resolução de um problema confere um carácter desafiante a todo este processo. No entanto, perante uma mesma tarefa, encontrar este caminho pode não surtir qualquer desafio para uns, enquanto, para outros, pode ser algo bastante complexo. A natureza de uma tarefa depende, assim, também de quem a realiza, uma vez que, se esta se tornar demasiado acessível para quem a resolve, perde as características de um problema, tornando-se num exercício (Ponte, 2005). Desta forma, segundo Pires (2001) e Ponte (2005), se enquanto professores procuramos propor bons problemas, temos de encontrar um equilíbrio entre o grau de desafio e de dificuldade que estes poderão ter para os nossos alunos. De facto, não pretendemos que estes desistam da sua resolução, mas também não queremos adulterar a natureza da tarefa.

A resolução de problemas em sala de aula constitui, então, um desafio tanto para alunos como para professores. Afinal queremos que os alunos se confrontem com verdadeiros problemas e, simultaneamente, fazer destas tarefas um meio para proporcionar actividades como modelar, analisar e conjecturar, mostrando-lhes, deste modo, "aquilo que a Matemática realmente é" (Schoenfeld, 1996, p. 72). Portanto, há toda uma variedade de problemas que devem ser propostos, passando também pelos seus diversos contextos – realidade, semi-realidade e Matemática pura (Skovsmose, 2008).

Neste estudo privilegio os problemas contextualizados na realidade, visto que estes podem contribuir para que os alunos desenvolvam o seu sentido crítico e adquiram um retrato mais abrangente da Matemática, compreendendo a sua utilidade e aplicações (Pierce & Stacey, 2009). Isto é, através da resolução de problemas os alunos adquirem "modos de pensar, hábitos de persistência e curiosidade, e confiança perante situações desconhecidas, que lhes serão muito úteis fora da aula de matemática" (NCTM, 2008, p. 57), como é o caso da vida quotidiana e do trabalho.

Todas estas potencialidades da resolução de problemas fazem com que a sua importância no ensino da Matemática se reflicta no destaque que lhe é dado no *Currículo Nacional do Ensino Básico* e no *Programa de Matemática do 3º ciclo do Ensino Básico* (1991). Surge no primeiro documento como uma experiência de aprendizagem em que os alunos se devem envolver e, no segundo, como uma capacidade que é, também, um eixo organizador do ensino da Matemática. Afinal, "aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os" (Polya, 2003, p. 26), ou seja, para adquirirmos a *capacidade* de resolver problemas, temos de passar por essa *experiência*.

Em ambos os documentos são reconhecidas várias das etapas que caracterizam essa experiência, salientando-se "a aptidão para desenvolver processos de resolução, (…) para analisar os erros cometidos e ensaiar estratégias alternativas" (M.E., D.E.B., 2001, p. 57), mas também a transversalidade da resolução de problemas. Sendo referida no *Programa de Matemática do 3º ciclo do Ensino Básico* (1991) como um objectivo geral; e no *Currículo Nacional do Ensino Básico*, como um "contexto universal de aprendizagem", pelo que deve ser "integrada naturalmente nas diversas actividades" (p. 68) realizadas em aula. No entanto, é no *Novo Programa do Ensino Básico* (2007), aquele em que espero no futuro desenvolver a minha prática lectiva, que esta transversalidade é, mais amplamente, evidenciada. Pois, este documento não se limita a reconhecê-la como uma capacidade transversal, mencionando-a como "uma actividade fundamental para a aprendizagem dos diversos conceitos, representações e procedimentos matemáticos" (p. 8).

Ao surgir contextualizada na realidade, a resolução de problemas vai ao encontro de outros objectivos curriculares e programáticos. No *Currículo Nacional do Ensino Básico*, a "tendência para usar a matemática, em combinação com outros saberes, na compreensão de situações da realidade" (p. 57) surge como algo fundamental no desenvolvimento da competência matemática dos alunos. Já no *Programa de Matemática do 3º ciclo do Ensino Básico* (1991), "a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real" (p. 11) é considerada um objectivo geral no ensino da Matemática.

E, também no *Novo Programa do Ensino Básico* (2007) é referido que "Os alunos devem ser capazes de *apreciar* a Matemática" (p. 6) reconhecendo a sua importância e aplicação na vida diária.

Desta forma, a resolução de problemas contextualizados na realidade surge nos diversos documentos curriculares já referidos como um modo de potencializar a concretização de vários objectivos transversais e gerais do ensino da Matemática.

Perspectivas sobre o ensino da Geometria

Actualmente a Geometria tem uma expressão significativa no ensino desde os níveis mais elementares, sendo trabalhada gradualmente desde o primeiro ciclo do ensino básico até ao ensino secundário. Contudo, o papel da Geometria no ensino da Matemática nem sempre foi tão relevante, tendo sofrido grandes alterações ao longo das últimas décadas.

Antes do movimento da Matemática Moderna, a Geometria presente no ensino restringia-se, essencialmente, às construções geométricas e à Geometria euclidiana do plano e do espaço (Veloso, 1998). Com o referido movimento, o seu papel no ensino tornou-se ainda mais diminuto,

> a geometria tornou-se um «parente pobre» da álgebra linear, as actividades envolvendo construções geométricas foram consideradas matéria de outras disciplinas, como a Educação Visual, a «importância prática» da geometria reduzia-se ao teorema de Pitágoras e a umas quantas fórmulas para o cálculo de áreas e volumes. (Abrantes, 1999, p. 155)

Assim, a Geometria, o "meio – talvez o mais poderoso – para que as crianças sintam a força do espírito humano, isto é, do seu próprio espírito" (Freudenthal, 1973, p. 407), era ensinada desvalorizando a intuição, a visualização e a manipulação que caracterizam as primeiras experiências geométricas das crianças: a exploração do meio que as rodeia. Afinal, ao movimentarem-se de um lado para outro, distinguir os objectos e os graus de proximidade dos mesmos, as crianças estão a usar o seu raciocínio geométrico para resolverem problemas do seu dia-a-dia (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999).

Era também esquecido que a Geometria acompanha as crianças durante o seu crescimento, estando presente no quotidiano, na Natureza, na arte e nos vários campos da nossa sociedade actual, como o *design* e a arquitectura. E que, além disso, é fonte de problemas que "podem propiciar o desenvolvimento, entre outras, das capacidades de visualização espacial, de raciocínio e de argumentação, identificadas como fundamentais para os cidadãos na época actual e no futuro" (Junqueira, 1994, p. 24).

Reconhecidos tais factos, o ensino da Geometria foi tomando, progressivamente, o papel que agora tem. Sendo a Geometria reconhecida como "o conteúdo do currículo da matemática onde os alunos aprendem a raciocinar e a compreender a estrutura axiomática da matemática" (NCTM, 2008, p. 44), e as ideias e representações geométricas encaradas como úteis quer na atribuição de significado a diversos conceitos matemáticos, quer na resolução de problemas em variados contextos (matemáticos e do dia-a-dia), sugerindo-se a conexão do referido tema com outras áreas (NCTM, 2008).

Em particular, no que diz respeito ao contexto real, há quem defenda que a Geometria "presta-se, mais do que outros temas, para a aprendizagem da matematização da realidade e para a realização de descobertas, que sendo feitas também «com os próprios olhos e mãos, são mais convincentes e surpreendentes» " (Veloso, 1998, p. 26). Estas descobertas "com os próprios olhos e mãos" reportam-nos para as construções geométricas, que realizadas pelas mãos, reproduzem informações úteis aos olhos. É, também, através da elaboração de construções geométricas que os alunos vão construindo "uma «memória» de imagens que serão o suporte de experiências de visualização progressivamente mais complexas" (Veloso, 1998, p. 131). E é esta visualização (construção e manipulação de imagens mentais) que se procura que os alunos adquiram, e que se torna essencial à medida que progridem na sua escolarização.

A noção de que a capacidade de construir e manipular imagens mentais se adquire de modo progressivo está inteiramente relacionada com o entendimento de que a compreensão da Geometria se pode construir ao longo dos anos de escolaridade, partindo de um raciocínio mais informal para um mais formal. Percepção, esta, que abriu portas para que a intuição, a visualização e a manipulação tivessem o seu lugar no ensino deste tema (NCTM, 2008). Deste modo, as sugestões dos *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* vão no sentido de partir das noções informais que as crianças possuem quando chegam à escola; possibilitar a exploração das mesmas através do apelo à visualização e utilização de materiais manipuláveis; e procurar que os alunos justifiquem convenientemente as suas conjecturas e conclusões, para se alcançar a formalização pretendida.

Na unidade leccionada no âmbito do estudo aqui apresentado, uma das formas de ter em conta as recomendações deste documento consiste na exploração das noções informais que as crianças possuem, recorrendo à utilização de materiais que possibilitam a realização de construções geométricas. Aspecto, este, que foi tido em conta na problemática definida, em que procuro compreender as potencialidades de dois destes materiais para a resolução de problemas: o *software* de Geometria dinâmica e o material de desenho.

O referido programa informático é apenas um dos muitos *softwares* a que, actualmente, se pode recorrer no ensino da Matemática. Sendo a utilização destes

> encarada como uma contribuição significativa no sentido de promover a compreensão dos conceitos, a exploração de diversas representações e de as relacionar, a investigação de propriedades e de relações matemáticas, os processos de natureza indutiva e experimental, a generalização e os processos argumentativos e a modelação, entre outros. (Oliveira & Domingos, 2008, p. 280)

Estes *softwares* podem ser agrupados em diversas categorias, estando os programas de Geometria dinâmica incluídos na que se refere ao uso do computador enquanto ferramenta (Oliveira & Domingos, 2008, p. 280). Isto é, como verificaram Piteira & Matos (2002), os alunos utilizam este *software*, "não com o fim de o explorarem, mas para *com ele* trabalharem a geometria e para *através dele* pensarem em conceitos, propriedades, relações geométricas" (p. 69).

Segundo Olive (2002), um *software* de Geometria dinâmica é todo e qualquer meio tecnológico que, através do uso directo de um dispositivo apontador, como o rato, fornece ao usuário as ferramentas necessárias para criar os elementos básicos da Geometria euclidiana e estabelecer relações entre eles, permitindo a construção de objectos que podem ser transformados através do arrastamento de qualquer um dos seus componentes. Este arrastamento permite, não só, alterar uma figura, de forma a produzir centenas de exemplos com rapidez (Keyton, 1997), como também, fornece aos alunos um *feedback* contínuo, resultante da observação provocada por esse mesmo movimento, que auxilia a superação das suas dificuldades (Candeias, 2005).

Além disso, com este tipo de tecnologia os alunos podem representar conceitos complexos, manipular entidades abstractas (Jiang, in press), e libertarem-se de tarefas mecânicas e rotineiras (Piteira & Matos, 2002), para, assim, se concentrarem "nas decisões a tomar, na reflexão, no raciocínio e na resolução de problemas" (NCTM, 2008, p. 26). Aliar este facto ao *feedback* contínuo que este *software* fornece, favorece a realização de investigações pelos alunos, uma vez que potencializa a formulação de conjecturas.

Keyton (1997) teve a oportunidade de observar este fenómeno no primeiro ano em que, nas suas aulas, utilizou *software* de Geometria dinâmica. Segundo ele, houve um aumento do entusiasmo, do envolvimento e da produtividade dos alunos, uma vez que, numa investigação habitualmente por ele proposta, o número de teoremas formulados por estes aumentou de 125 para 300, surgindo novas ideias e conjecturas, diariamente. No entanto, como se salienta em Oliveira & Domingos (2008), este aumento na rapidez de formulação de conjecturas, não significa que tenha ocorrido um maior número de aprendizagens, sendo importante ter em conta a natureza das mesmas quando este recurso esteve presente e quando tal não ocorreu.

Pensar em todas estas potencialidades do *software* de Geometria dinâmica levou diversos autores a debruçaram-se sobre aquilo que o caracteriza e distingue dos métodos mais tradicionais: o arrastamento de pontos. Desses autores fazem parte Arzarello, Olivero, Paola & Robutti (2002) que identificaram sete tipos de arrastamento de pontos utilizados pelos alunos em função dos objectivos que pretendem atingir, como sejam o explorar, criar conjecturas, validar e justificar. Reconhecendo esta relação entre o objectivo dos alunos e o arrastamento por eles utilizado, os referidos autores salientam que analisar o modo como estes usam os diferentes tipos de arrastamento é uma forma de identificar os seus processos cognitivos.

Assim, de acordo com os mesmos autores, perante uma tarefa de natureza aberta, o aluno começa por investigar e explorar as suas construções procurando regularidades. Para isso, pode mover um ponto livre aleatoriamente, sem um plano pré-definido – arrastamento aleatório (*wandering dragging*) –, arrastar um ponto que está ligado a outro objecto, como uma recta – arrastamento restrito (*bound dragging*) – ou mover os pontos para obter uma forma específica – arrastamento guiado (*guided dragging*). Durante este processo o ponto arrastado pode manter uma determinada propriedade, mesmo sem que o aluno se aperceba disso – arrastamento sem nexo (*dummy locus dragging*) – o que o aproxima da descoberta da mesma. Mas, quando os pontos são movidos ao longo de uma linha com o objectivo de manter essa mesma propriedade – arrastamento numa linha (*line dragging*) – é sinal de que esta já se tornou explícita. Chegando a uma conjectura, o aluno pode verificá-la ligando um ponto ao objecto encontrado e movendo-o sobre o mesmo – arrastamento com ligação (*linked dragging*). Por exemplo, se a solução é um arco de circunferência, o aluno pode construir um ponto no mesmo, unindo-o ao centro com um segmento de recta, desta forma, arrastando o ponto, pode verificar que o comprimento de segmento se mantém, desvendando a propriedade envolvida. Por fim, para comprovar que a solução encontrada verifica as condições pretendidas, o aluno pode mover os seus pontos – arrastamento de teste (*dragging test*) – e concluir que esta corresponde, ou não, ao procurado.

Portanto, o arrastamento de pontos pode trazer benefícios não só para os alunos que o usam, como também para os professores que procuram compreender os processos cognitivos por estes utilizados. Apesar disso, para alguém que não está familiarizado com *software* de Geometria dinâmica, o arrastamento de pontos pode ser visto como uma distracção, uma vez que no suporte de papel não se observam construções em movimento (Arzarello *et al*., 2002).

Além disso, existem outros factores que podem impedir um melhor usufruto desta tecnologia. Num estudo, Junqueira (1994) verificou que a aparência visual das construções influenciou grandemente o trabalho dos alunos, o que os pode impedir de chegar a conclusões correctas, ou sentir a necessidade de recorrer à demonstração. Já Piteira & Matos (2002) reconhecem que a falta de domínio deste *software* pode constituir um obstáculo à realização de tarefas matemáticas, pelo que "Os alunos devem conhecer minimamente as funções dos menus, para construírem mais rapidamente novos objectos e estudá-los" (p. 69). Assim, a familiaridade com este recurso e o papel do professor tornam-se fundamentais no sentido de auxiliar os alunos a tirar um melhor partido da utilização do mesmo.

Por todos estes motivos, os ambientes de Geometria dinâmica alteram o ensino e a aprendizagem da Matemática, visto que ocorrem novas interacções que, de acordo com Olive (2002), aproximam a aula de Matemática de um laboratório de ciências. Pois, nestes ambientes a aprendizagem da Matemática torna-se numa investigação de fenómenos interessantes onde o papel do aluno é observar, registar, prever, conjecturar (Olive, 2002). Enfim, o aluno vê-se próximo ao papel de cientista que experimenta a sensação de "fazer" Matemática, o que de acordo com Junqueira (1994), pode levar a alterar as suas perspectivas sobre esta ciência e a sua aprendizagem.

Candeias (2005) verificou tal facto, no que diz respeito ao caso particular da Geometria, quando, num estudo relativo à utilização de *software* de Geometria dinâmica, comparou os dois questionários que propôs aos alunos: um no inicio da investigação e outro mais próximo do final da mesma. No primeiro questionário, os alunos, na sua maioria, consideraram que a Geometria "assentava no estudo de figuras geométricas e de sólidos” (p. 239). Enquanto no segundo questionário, as ideias apresentadas “prendem-se com o facto da geometria colocar «desafios que temos que superar» e com [o] facto de nela ser «fundamental fazer investigações» ” (p. 239). Assim, o referido autor, concluiu que, a utilização deste *software* na realização de tarefas de investigação, exploração e resolução de problemas contribuiu para as mudanças que ocorreram ao nível das perspectivas da Geometria.

No entanto, Gomes & Vergnaud (2004), ao estudarem a resolução de problemas geométricos usando dois tipos de recursos, material de desenho e *software* de Geometria dinâmica, concluíram que o ensino da Geometria não se deve limitar a um único recurso, visto que, através de cada um deles, os alunos utilizam diferentes propriedades dos mesmos conceitos matemáticos. Logo, este estudo ajuda a desmitificar o facto de que estes programas “vêem substituir os recursos anteriormente utilizados, tornando-os obsoletos” (Oliveira & Domingos, 2008, p. 284), ilustrando que o ensino da Geometria deve ser rico em situações que envolvam diversos recursos para que, desta forma, os alunos possam ter oportunidade de utilizar a vasta gama de propriedades que caracterizam os conceitos que conhecem.

Por esse motivo, no estudo que aqui se apresenta optei por utilizar dois recursos, seleccionados tendo em conta as sugestões propostas pelo *Currículo Nacional do Ensino Básico* e pelo *Programa de Matemática do 3.º ciclo do Ensino Básico* (1991). Por um lado, o primeiro realça o desenvolvimento da aptidão para realizar construções geométricas, em particular, recorrendo a *software* de Geometria dinâmica. Enquanto, por outro, o segundo propõe o uso de instrumentos adequados para realizar construções geométricas, como régua e compasso, e de “meios informáticos tirando partido das suas potencialidades” (p. 11). Associando estas ideias, no *Novo Programa do Ensino Básico* (2007), é referido que “Os alunos devem *conhecer os factos e procedimentos básicos* da Matemática” (p. 4), para o qual contribui o uso dos instrumentos matemáticos referidos.

Utilizar estes recursos na Geometria, é algo que surge no âmbito da realização de construções geométricas, sendo “particularmente importante na resolução de problemas e na exploração de situações, casos em que os cálculos e os procedimentos de rotina não constituem objectivo prioritário de aprendizagem” (Ponte *et al.*, 2007, p. 9). Em particular, o *Programa de Matemática do 3.º ciclo do Ensino Básico* (1991) dá “importância à realização de tentativas, medições, experiências, à justificação de raciocínios e escolha de argumentação válida, que terão lugar também na resolução de problemas por construção, por exemplo no trabalho com lugares geométricos” (p. 31).

Compreende-se, assim, a pertinência da problemática definida neste estudo, em que, além de se considerar a utilização dos referidos recursos numa unidade inserida no tema Geometria, se analisam as potencialidades que estes podem trazer para a resolução de problemas do referido tema. Afinal,

> A Geometria, na sua fácil interacção com outros campos da Matemática e com a realidade, é geradora de problemas de grande riqueza, onde podem coexistir aspectos lúdicos e de interesse prático, características estas eminentemente favoráveis à aprendizagem. (M.E., 1991a, p. 172)

Portanto, a problemática aqui definida faz todo o sentido no âmbito da Geometria, e em particular da unidade Lugares Geométricos. Pois vai ao encontro do que é preconizado no *Currículo Nacional do Ensino Básico*, no *Programa de Matemática do 3.º ciclo do Ensino Básico* (1991) e no *Novo Programa do Ensino Básico* (2007).

A unidade de ensino

O estudo aqui apresentado foi realizado na sequência da minha intervenção lectiva na unidade Lugares Geométricos, no 8.º ano de escolaridade. Na planificação das aulas tive em conta diversos aspectos que influenciaram as estratégias de ensino adoptadas. Neste capítulo apresento a caracterização da turma, os objectivos programáticos e os conceitos envolvidos, assim como, a sequência das aulas e as estratégias de ensino adoptadas em função destes. Para terminar este capítulo apresento a síntese das aulas realizadas, tendo em conta as planificações efectuadas considerando todos os factores anteriormente referidos.

Caracterização da turma

A turma sobre a qual o estudo incide é o 8.º A da Escola Básica 2, 3 Maria Alberta Menéres. Esta turma é constituída por 28 alunos, 17 raparigas e 11 rapazes, cujas idades, no início do ano lectivo, estavam compreendidas entre os 12 e os 15 anos (Quadro 1).

Idades	Número de Alunos
12	7
13	18
14	0
15	3

Quadro 1 **–** Idades dos alunos da turma sobre a qual incide o estudo.

A turma manteve uma formação muito semelhante à do ano anterior, tendo sido nela integrados cinco alunos, dois dos quais repetentes. Os novos alunos foram acolhidos naturalmente pela turma, mantendo-se esta unida e coesa.

No fim do primeiro período, a turma foi classificada como apresentando um comportamento irregular e um bom aproveitamento (Figura 1), havendo apenas quatro alunos para os quais foi proposto plano de recuperação.

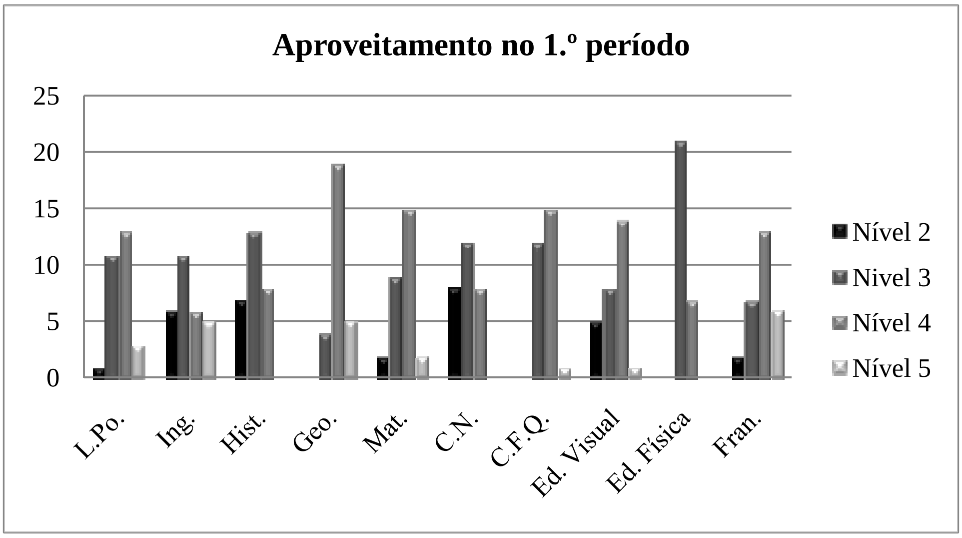


Figura 1 – Aproveitamento dos alunos em estudo no 1º período.

Já no segundo período, tanto o comportamento como o aproveitamento (Figura 2) foram considerados bons, havendo uma subida de níveis significativa.

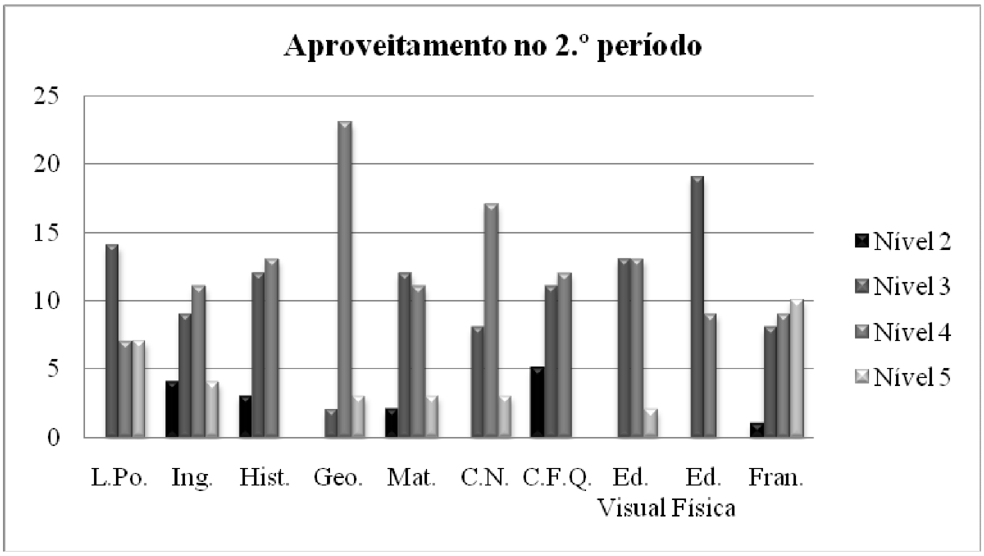


Figura 2 – Aproveitamento dos alunos em estudo no 2º período.

O bom aproveitamento desta turma reflecte-se no decorrer das aulas de Matemática, uma vez que os alunos são bastante participativos, principalmente quando estão envolvidos em tarefas que os levam a formular estratégias e fazer descobertas.

Quanto aos encarregados de educação dos referidos alunos, nas duas reuniões de pais a que assisti este ano lectivo (2009/2010), a grande maioria esteve presente e mostrou-se participativa e preocupada com a educação dos filhos.

Observa-se que, na sua maioria, estes pais frequentaram, pelo menos, o ensino secundário, como se pode observar na Figura 3.

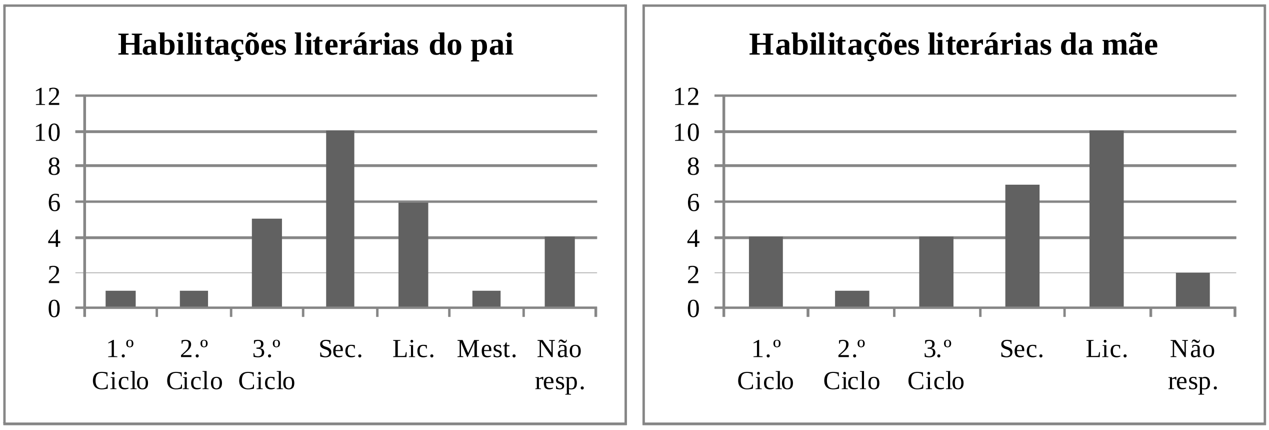


Figura 3 – Habilitações literárias dos pais dos alunos em estudo.

A exemplo dos pais, estes alunos parecem ter aspirações que os levam a querer continuar a sua escolarização e formação, uma vez que pretendem exercer profissões que assim o requerem, relacionadas, por exemplo, com Medicina, Economia e Jornalismo. Por este motivo, estes alunos mostram-se preocupados com as suas notas, o que se reflecte não só no aproveitamento, como, também, no comportamento que, como já foi referido, tem vindo a melhorar ao longo do ano.

Ancoragem da unidade no programa

A prática lectiva sobre a qual se debruça este estudo foi desenvolvida na unidade Lugares Geométricos, no 8.º ano de escolaridade, tendo por base as orientações e sugestões preconizadas no *Programa de Matemática do 3º ciclo do Ensino Básico* (1991).

Neste documento, para a referida unidade está prevista a abordagem dos seguintes aspectos:

- Problemas envolvendo distâncias entre dois pontos
  - Circunferência, círculo
  - Superfície esférica, esfera
  - Mediatriz de um segmento de recta
  - Circunferência circunscrita
- Conjunção de condições e intersecção de conjuntos. (p. 41)

É sugerido que, através da leccionação dos mesmos, sejam alcançados os seguintes objectivos:

- Resolver geometricamente problemas que envolvam a noção de distância entre dois pontos.
- Identificar o conjunto de pontos do plano ou do espaço que estão a uma distância *d* (menor ou igual a *d*) de um ponto dado.
- Reconhecer que o conjunto dos pontos do plano equidistantes dos extremos de um segmento de recta é a recta perpendicular ao meio do segmento.
- Fazer um esboço que facilite a compreensão e resolução de um problema.
- Descrever e justificar, oralmente e por escrito, o processo usado na resolução de um problema.
- Determinar o conjunto de pontos que satisfazem uma conjunção de condições. (p. 41)

Para tal, o referido documento tem algumas sugestões metodológicas, em que são dados exemplos de problemas a propor. Um desses problemas consiste em "Determinar sobre uma estrada a melhor posição para uma bomba de gasolina que sirva igualmente duas vilas situadas fora da estrada" (p. 41). O que indica que os problemas desta unidade devem ser contextualizados na realidade, quando tal for possível.

Tendo em conta que, futuramente, na minha prática lectiva seguirei as orientações do *Novo Programa do Ensino Básico* (2007), o que vem, aliás, ao encontro das opções tomadas pela professora da turma considerada, algumas delas também foram consideradas neste estudo.

Neste novo programa, a unidade Lugares Geométricos surge no tópico *Circunferência*, visando os objectivos que se seguem:

- Identificar e construir circunferência, círculo, bissectriz e mediatriz.
- Identificar superfície esférica e plano mediador.
- Resolver problemas envolvendo a circunferência e outros lugares geométricos.

(p. 53)

O tema *Circunferência inscrita e circunferência circunscrita a um triângulo* não é apresentado dentro desta unidade, mas inclui-se no mesmo tópico, visando o objectivo: "Construir a circunferência inscrita e a circunferência circunscrita a um triângulo dado" (p. 53).

Assim, a unidade de ensino, em que decorreu o estudo, foi leccionada tendo por base o *Programa de Matemática do 3º ciclo do Ensino Básico* (1991) e as sugestões do *Novo Programa do Ensino Básico* (2007) referentes à construção de determinados lugares geométricos. Esta opção foi tomada tendo em conta que para resolver problemas relativos a lugares geométricos, é necessário não só identificar os conjuntos de pontos a eles associados, mas, também, construi-los. Além disso, aos objectivos destes programas, acrescentei um relacionado com a disjunção de condições/ reunião de conjuntos, uma vez que estes conceitos estão inteiramente relacionados com a conjunção de condições/ intersecção de conjuntos, e ambos surgem no 9.º ano, no contexto da recta real. Por isso, considerei que trabalhar os conceitos referidos conjuntamente seria benéfico aos alunos e às aprendizagens que se espera que realizem futuramente. Desta forma, os subtemas e objectivos seguidos na unidade Lugares Geométricos resultaram no que se apresenta no Quadro 2.

<table>
<tr><th>Subtemas:</th><th colspan="2">Objectivos específicos:</th></tr>
<tr><td>Lugar geométrico. Circunferência. Círculo. Superfície esférica. Esfera.</td><td>• Identificar o conjunto dos pontos do plano ou do espaço que estão a uma distância d (menor ou igual a d) de um ponto dado.
• Construir círculo e circunferência.</td><td rowspan="3">• Resolver geometricamente problemas que envolvam a noção de distância entre dois pontos.

• Fazer um esboço que facilite a compreensão e resolução de um problema.

• Descrever e justificar, oralmente e por escrito, o processo usado na resolução de um problema.</td></tr>
<tr><td>Mediatriz de um segmento de recta. Circunferência circunscrita.</td><td>• Reconhecer que o conjunto dos pontos do plano equidistantes dos extremos de um segmento de recta é a recta perpendicular ao segmento e que passa pelo seu ponto médio.
• Construir mediatriz e a circunferência circunscrita a um triângulo dado.</td></tr>
<tr><td>Conjunção e disjunção de condições. Intersecção e reunião de conjuntos.</td><td>• Determinar o conjunto de pontos que satisfazem uma conjunção ou uma disjunção de condições.</td></tr>
</table>

Quadro 2 – Subtemas trabalhados no âmbito da unidade Lugares Geométricos.

Conceitos matemáticos relativos à unidade

Na unidade leccionada foram trabalhados diversos conceitos matemáticos relacionados com lugares geométricos. Esses conceitos e as suas definições apresentam-se a seguir.

Lugar geométrico

Conjunto de todos os pontos que têm uma condição comum.

Circunferência de centro C e raio r

Conjunto dos pontos do plano cuja distância a *C* é igual a *r*.

Círculo de centro C e raio r

Conjunto dos pontos do plano cuja distância a *C* é menor ou igual a *r*.

Superfície esférica de centro C e raio r

Conjunto dos pontos do espaço cuja distância a *C* é igual a *r*.

Esfera de centro C e raio r

Conjunto dos pontos do espaço cuja distância a *C* é menor ou igual a *r*.

Mediatriz de um segmento de recta [AB]

Conjunto dos pontos do plano que estão à mesma distância de *A* e de *B*.

Circuncentro de um triângulo

Ponto equidistante aos três vértices do triângulo, ou seja, é o ponto de intersecção das mediatrizes dos lados do triângulo.

Circunferência circunscrita a um triângulo

Circunferência que contem todos os vértices do triângulo (pelo que tem necessariamente como centro o circuncentro do triângulo).

Intersecção de lugares geométricos/ Conjunção de condições

A intersecção de dois lugares geométricos *A* e *B* é o lugar geométrico dos pontos que pertencem a *A* e a *B*. O lugar geométrico obtido tem por condição a conjunção das condições que definem *A* e *B*. Pelo que à intersecção de dois lugares geométricos corresponde a conjunção de duas condições.

Reunião de lugares geométricos/ Reunião de condições

A reunião de dois lugares geométricos A e B é o lugar geométrico dos pontos que pertencem a A ou a B. O lugar geométrico obtido tem por condição a disjunção das condições que definem A e B. Pelo que à reunião de dois lugares geométricos corresponde a disjunção de duas condições.

Sequência de aulas

A sequência das seis aulas leccionadas foi planeada tendo em conta os diversos subtemas a abordar e a forma como os conceitos neles envolvidos se relacionam – como se explica no subcapítulo que se segue – tendo-se seguido a sequência apresentada no quadro abaixo.

Calendarização das aulas:	**Subtemas:**
8 de Março de 2010 (90 minutos)	Lugar geométrico. Circunferência. Círculo. Superfície esférica. Esfera.
11 de Março de 2010 (45 minutos)	
12 de Março de 2010 (90 minutos)	Mediatriz de um segmento de recta. Circunferência circunscrita.
15 de Março de 2010 (90 minutos)	
22 de Março de 2010 (90 minutos)	Conjunção e disjunção de condições. Intersecção e reunião de conjuntos.
25 de Março de 2010 (45 minutos)	

Quadro 3 – Calendarização das aulas leccionadas na unidade Lugares Geométricos.

Como é visível na calendarização apresentada, a minha intervenção ocorreu no final do segundo período do ano lectivo 2009/2010, tendo sido interrompida durante um período de duas aulas (18 e 19 de Março). Essas aulas foram leccionadas pela professora de Matemática da turma, tendo sido destinadas à preparação e realização do segundo teste de avaliação do referido período, de acordo com a planificação do grupo de professores da escola que leccionam este nível de escolaridade.

Estratégias de ensino

"Num ensino efectivo, são utilizadas tarefas matemáticas significativas para introduzir conceitos importantes e para envolver e desafiar intelectualmente os alunos" (NCTM, 2008, p. 19), por esse motivo, ao longo de toda a minha intervenção os conceitos surgiram a partir da actividade desenvolvida pelos alunos durante a resolução de diversas tarefas.

Essas tarefas, essencialmente de carácter problemático e exploratório, foram formuladas tendo em conta as aprendizagens prévias dos alunos. Afinal, a maior parte dos conceitos a abordar já lhes era conhecida quer pelo trabalho realizado anteriormente na Geometria, quer devido ao trabalho realizado noutras disciplinas, como Educação Visual.

Assim, procurei que os problemas propostos conduzissem os alunos à construção de novos conhecimentos através da descoberta das suas próprias estratégias e da mobilização dos seus conhecimentos prévios, pois:

> É muitas vezes mais eficaz, em termos de aprendizagem, que eles descubram um método próprio para resolver uma questão do que esperar que eles aprendam o método do professor e sejam capazes de reconhecer, perante uma dada situação, como o aplicar. (Ponte, 2005, p. 9)

Com esta estratégia de ensino, a discussão das tarefas propostas aos alunos tornou-se fundamental. Pois, dela esteve dependente a sua aprendizagem, na medida em que, constituiu uma oportunidade para que estes, que habitualmente são participativos, pudessem manifestar-se e sentir valorizadas as suas ideias e fundamentações, negociando significados matemáticos, reflectindo sobre a actividade produzida e construindo novos conhecimentos (M.E., 1991a; Ponte *et al*., 2007).

Desta forma, a referida estratégia de ensino tinha como intenção partir da concretização de um objectivo programático, a resolução de problemas, para alcançar os objectivos relacionados com a aquisição dos conceitos a abordar. Procurando-se, para tal, que através das discussões em grande grupo fosse possível a "formalização" de conceitos já conhecidos pelos alunos.

Ao leccionar a unidade Lugares Geométricos e tendo em conta a problemática definida, a apresentação de construções geométricas, relativas a contextos reais, teria uma grande presença nestas discussões. Por isso, inicialmente, pensei utilizar o Quadro Interactivo para que fossem visíveis as imagens que contextualizavam as tarefas a apresentar, expondo as resoluções das mesmas utilizando este recurso. Infelizmente, o Quadro Interactivo avariou antes de dar início à minha intervenção, pelo que optei por utilizar o *DataShow* em sua substituição. Isto é, este recurso foi utilizado para projectar no quadro (branco) as referidas imagens de modo a que os alunos pudessem expor as suas resoluções à turma efectuando construções sobre essas imagens, tornando mais claras as estratégias apresentadas.

Nesta mesma unidade, um dos objectivos previstos é a resolução geométrica de problemas (M.E., 1991b), que só é possível utilizando instrumentos que permitem fazer construções geométricas. Portanto, indo ao encontro das recomendações dos diversos documentos curriculares, uma das estratégias adoptadas ao longo de toda a minha intervenção foi possibilitar o contacto permanente com esses instrumentos, ora utilizando material de desenho, ora recorrendo a *software* de Geometria dinâmica (*GeoGebra*). Além disso, "A solução para os «erros» da percepção visual não é diminuir-lhe o estatuto na educação matemática e «confiar» apenas nas palavras e nos números, com esperança, de resto infundada, que desta forma o rigor esteja garantido" (Veloso, 1998, p. 131), pelo que se torna essencial elaborar construções geométricas para observar, experimentar e concretizar ideias, conceitos e conjecturas, mas, também, para compreender a Geometria plana.

A opção de utilizar este tipo de *software* não foi feita apenas com base na possibilidade de fazer construções geométricas, mas tendo em conta outras potencialidades que podem ser exploradas. Entre outras propriedades, o *GeoGebra* permite o arrastamento de pontos ou partes de figuras e o uso de texto e imagens.

Através do arrastamento de pontos e figuras, que não é possível com o material de desenho, este *software* torna-se um impulsionador na formulação de conjecturas (Jiang, in press). Já o uso de texto e imagens possibilita a criação de ficheiros que, além de visualmente apelativos, podem estar relacionados com a realidade, estimulando a resolução de problemas com este contexto. Este pode surgir através do uso de uma fotografia digital, ou de um mapa, sobre o qual se trabalha, ou ser simulado representando situações reais apenas através de construções geométricas (Pierce & Stacey, 2009).

Apesar das vantagens que a utilização de ficheiros com imagens trás à resolução de problemas contextualizados na realidade, criar estes ficheiros, na sala de aula, implica que os alunos os aprendam a fazer e, também, que percam algum tempo de aula a construí-los. Por isso, quando os utilizei, forneci ficheiros onde já se encontravam as imagens sobre as quais se pretendia trabalhar. Desta forma, não seria dispendido tempo a fazer algo que não é essencial à aprendizagem matemática dos alunos, uma vez que o grande objectivo era promover a capacidade de resolver problemas geométricos.

Tendo em conta todos estes aspectos, considerei que o *GeoGebra* só deveria ser utilizado na realização de tarefas em que as potencialidades deste recurso fossem, de facto, aproveitadas, principalmente no que diz respeito ao arrastamento de pontos. E optei por recorrer a material de desenho quando tal não ocorresse, nomeadamente, quando as regiões a colorir apresentavam limites "irregulares", como aconteceu em algumas tarefas envolvendo mapas, tornando-se impossíveis de "colorir" utilizando o *GeoGebra*.

Desta forma, os alunos da turma sobre a qual incide o estudo, puderam contactar com recursos que não surgem em outros temas matemáticos, dando-lhes a novidade e diversidade que eles tanto apreciam. Mas, também, a possibilidade de desenvolverem a capacidade de visualização espacial, essencial quer nas suas aprendizagens futuras, quer na vida quotidiana.

Os dois tipos de instrumentos seleccionados para esta função são de tal modo distintos que condicionaram as formas de trabalho dos alunos. Assim, ao utilizarem o *GeoGebra* e, consequentemente, o computador, os alunos trabalharam a pares, enquanto na utilização de material de desenho, este método não foi uma constante, surgindo, também, o trabalho em grupo. A opção de trabalhar a pares para utilizar *software* de Geometria dinâmica pareceu-me a mais adequada, pois, como os alunos não conheciam aprofundadamente esta tecnologia, podiam emergir diversas dúvidas que, trabalhando individualmente, só poderiam ser esclarecidas pelo professor. Logo, havia a possibilidade de surgirem algumas inibições por parte dos alunos quanto ao uso do *software*, o que condicionaria as suas estratégias. Já com o trabalho em grupo, esta situação podia ser evitada, uma vez que este possibilita a colaboração na resolução de problemas e a partilha de ideias e conhecimentos (também relativos ao uso do *GeoGebra*), o que conduz a uma maior rapidez na formulação de conjecturas (Jiang, in press). Contudo, ter mais de dois alunos a utilizar um mesmo computador, diminui muito as oportunidades de contacto directo com o *software*, o que poderia levar os alunos a estarem menos envolvidos na tarefa, acabando por perder o interesse na concretização da mesma, não sendo esse o meu objectivo.

Além disso, pela observação prévia da turma verifiquei que, não só, o trabalho a pares é algo frequente, como também, há uma grande colaboração e espírito crítico entre os pares de trabalho habituais. Portanto, este método de trabalho oferece vantagens por mais do que um aspecto.

As diferenças entre os referidos instrumentos, utilizados para um mesmo fim, elaborar construções geométricas, levaram-me a procurar estabelecer um paralelismo entre eles. Pois, desta forma, os alunos poderiam compreender a sua pertinência, as diferenças e semelhanças entre eles, assim como, as suas vantagens e desvantagens. Por isso, em algumas das discussões em grande grupo, procurei fazer este paralelismo, partindo das explicações dadas pelos alunos acerca da utilização dos referidos recursos.

Assim, durante a minha intervenção procurei possibilitar o contacto com dois tipos de instrumentos que permitem fazer construções geométricas, fazer o paralelismo entre ambos e promover discussões enriquecedoras, que potencializem a aquisição de conhecimentos. No entanto, em função dos objectivos que procurava atingir aula-a-aula (Anexo I), além destas, tomei outras opções, onde se incluem a selecção e construção das tarefas a realizar (Anexo II).

De seguida, apresento cada aula no sentido de explicitar essas mesmas opções, isto é, de expor e justificar as estratégias utilizadas, os recursos seleccionados, as tarefas propostas, a sequência adoptada e a sua integração no seguimento de aulas da unidade.

1.ª Aula (8 de Março de 2010)

Sendo a primeira aula destinada à unidade Lugares Geométricos, esta foi planeada com o intuito de introduzir os conceitos que serviriam de base aos tópicos a explorar ao longo da unidade. Por um lado, era necessário definir o conceito de lugar geométrico, uma vez que este seria transversal a todas as aulas. E, por outro, o de circunferência, dado que, só a partir dele se partiria para o espaço (esfera e superfície esférica) e para a noção de mediatriz de um segmento de recta (construída às custas de duas circunferências de igual raio).

Para atingir este objectivo, inicialmente previ que o primeiro conceito a introduzir seria o de lugar geométrico. Contudo, percebendo que para compreender esta definição, eram necessários exemplos onde esta se aplicasse, planeei a aula de modo a que com a primeira tarefa proposta surgissem dois lugares geométricos que serviriam este propósito. Desta forma, os alunos teriam dois exemplos de uma mesma definição, proporcionando-lhes uma noção mais abrangente da mesma, evitando associá-la a apenas um tipo de lugar geométrico.

Tendo esta aula, também, a intenção de introduzir a definição de circunferência, inteiramente relacionada com a noção de círculo, estes dois lugares geométricos foram os seleccionados para a primeira tarefa. Assim, na discussão que decorreria da mesma, surgiriam os conceitos fundamentais ao trabalho nesta unidade.

Havendo tempo de aula a gerir e diversos conteúdos programáticos a abranger, pensei em outras duas tarefas: problemas contextualizados na realidade onde se determinariam conjuntos de pontos interiores, exteriores ou pertencentes a determinadas circunferências. Dado que os primeiros dois conjuntos ainda não tinham sido trabalhados (os pontos interiores a uma circunferência tinham apenas surgido em conjunto com a mesma, enquanto círculo), o primeiro problema escolhido foi aquele cujas soluções estariam relacionadas com os mesmos. Desta forma, se não fosse possível concretizar a terceira tarefa, estaria assegurado o cumprimento dos objectivos da aula.

Seleccionei, assim, para segunda tarefa um problema com duas alíneas, cada uma destinada a um destes casos, mas ambas direccionadas para a compreensão das condições exigidas pelo seu contexto. Isto é, com estas procurava que os alunos adequassem a sua solução aos dados do enunciado, no caso, a impossibilidade de encontrar alojamento em Espanha ou no mar. Já a terceira tarefa foi escolhida com o objectivo de consolidar os objectivos da aula, ou seja, tratava-se de um problema contextualizado na realidade onde se aplicavam os diversos conceitos já abordados.

Decididas as tarefas e conteúdos a abordar, e dada a problemática definida, era necessário seleccionar os recursos a utilizar, ou adaptar as tarefas em função de algum deles. Assim, analisei as potencialidades de ambos, optando pelo uso de material de desenho em todas as tarefas. Afinal, uma delas, a segunda, não era concretizável recorrendo ao *GeoGebra*, e na resolução das outras nenhum dos recursos tinha vantagem em relação ao outro. Portanto, reconhecendo que a sequência destas tarefas não poderia ser alterada e que na segunda não se poderia utilizar um dos recursos, optei por usar um único instrumento, evitando uma quebra no prosseguimento da aula.

Desta forma, nesta aula procurei introduzir os conceitos essenciais às aulas seguintes, optando por utilizar um recurso viável à realização das tarefas que pretendia propor e que visavam o cumprimento de alguns dos objectivos previstos para a unidade Lugares Geométricos.

2.ª Aula (11 de Março de 2010)

Esta aula seguia-se à introdução dos conceitos de círculo e circunferência, pelo que foi considerada a ideal para abordar os lugares geométricos do espaço associados aos mesmos (esfera e superfície esférica). Assim, planeei esta aula de modo a que surgissem dois novos conceitos partindo daqueles que tinham sido trabalhados na aula anterior.

Com este intuito e tendo em conta a duração da aula (apenas 45 minutos), foi prevista a discussão de uma tarefa proposta como trabalho de casa, em que, imaginando uma semicircunferência a rodar em torno de um segmento de recta, os alunos deveriam caracterizar os lugares geométricos descritos por um ponto, uma semicircunferência e um semicírculo. O movimento a imaginar acontecia no espaço, exigindo capacidades de visualização que podem ser difíceis para alunos do 8.º ano, por isso, criei um ficheiro, recorrendo ao *software* de Geometria dinâmica *Cabri3D* (Anexo II, Figuras 16 e 17) que ilustrasse este movimento, a fim de, durante o momento de discussão em grande grupo, evidenciar as propriedades dos lugares geométricos pedidos, e introduzir as definições dos que surgiam pela primeira vez: esfera e superfície esférica.

Para consolidar e aplicar estes conceitos, pensei numa tarefa a propor em aula. Inicialmente, esta tarefa envolvia astronautas e trajectórias, tendo um contexto que, apesar de parecer simular uma situação real, não respeitava as leis da Física, tornando-se pouco rigorosa e realista. Por isso, substituí-a por uma outra em que, além de se pedir para identificar lugares geométricos do espaço, sem fornecer aos alunos qualquer forma de representação dos mesmos, se procurava promover a capacidade de abstracção com uma questão cujo objectivo era levá-los a pensar na possibilidade de intersecção desses mesmos lugares geométricos. Assim, previ que na discussão deste problema seriam revistas as definições dos novos conceitos abordados na aula e exploradas as capacidades de abstracção e visualização espacial dos alunos.

Desta forma, previ esta aula como a única onde seriam abordados lugares geométricos do espaço. Procurando que nesta, além de introduzidos, estes pudessem ser trabalhados e consolidados.

3.ª Aula (12 de Março de 2010)

Esta aula destinava-se, essencialmente, à introdução do conceito de mediatriz de um segmento de recta. Pois, já se tendo trabalhado a noção de circunferência e, pretendendo-se abordar o conceito de circuncentro futuramente, surgia aqui o momento oportuno para introduzir o conceito de mediatriz de um segmento de recta.

Com este objectivo em mente, pensei num problema, de contexto semi-real, composto por três alíneas, em que se pretendiam determinar duas regiões definidas à custa da mediatriz de um segmento de recta. A primeira alínea surgiria como etapa preparatória à determinação das referidas regiões, pois nela era pedida a identificação da região correspondente a diversos pontos do mapa.

Na segunda alínea, a essencial à concretização do objectivo do problema, propunha-se a identificação das regiões mencionadas e do lugar geométrico construído com esse fim, sendo a discussão desta alínea o momento destinado à introdução do conceito já referido. Mas antes de o fazer, pretendia que, recordando o modo de elaborar essa construção com material de desenho, se comprovasse que esta verificava a condição enunciada, encontrando, assim, a propriedade que a define. Para tal, planeei que, ao recordar esta construção recorreria às funcionalidades do *GeoGebra*, ilustrando que os pontos na intersecção das circunferências construídas se encontravam a igual distância de ambos os seus centros e que, variando os raios das mesmas, estes pontos estariam sempre na mediatriz construída, verificando a propriedade pretendida.

Já a terceira alínea foi formulada com o intuito de desvendar uma das propriedades da mediatriz de um segmento de recta (a mediatriz de um segmento contém o seu ponto médio), pensando na discussão desta de modo a que fossem abordadas outras propriedades pretendidas. Assim, para este momento de aula foi planeado o desvendar de três propriedades da mediatriz de um segmento de recta recorrendo ao *GeoGebra*, de modo a que os alunos as pudessem comprovar através do rigor possibilitado por este *software*. Além disso, previ que ao abordar estas propriedades, fosse justificada a veracidade das mesmas, recorrendo a aprendizagens prévias dos alunos, nomeadamente no que diz respeito ao eixo de simetria de um triângulo isósceles.

Para resolver esta tarefa, estava previsto que, como já foi referido, se utilizasse o *GeoGebra*, mas não foi isso o inicialmente planeado. Afinal, o problema poderia ser realizado utilizando qualquer um dos recursos e, aparentemente, o uso deste *software* não traria muitas vantagens à resolução do mesmo. Contudo, ao perceber que, utilizando este recurso, na discussão desta tarefa poderiam ser exploradas as várias situações anteriormente referidas, potencializando a apropriação dos conceitos e propriedades por parte dos alunos, optei por recorrer ao mesmo.

Esta não foi a única tarefa planeada para esta aula, tendo-se pensado na realização de uma outra, destinada à exploração das propriedades da mediatriz da corda de uma circunferência. Para tal, pretendia-se que, utilizando o arrastamento de pontos do *GeoGebra*, que permitiria que cada circunferência e respectiva corda construídas fossem um protótipo de todas as circunferência e cordas que se poderiam construir, os alunos concluíssem que a mediatriz da corda de uma circunferência contém o centro da mesma. Desta forma, procurava que os alunos tivessem contacto com uma tarefa de natureza exploratória em que seria desbravado caminho ao trabalho a realizar no 9.º ano.

Portanto, planeei esta aula de modo a que fosse trabalhado o conceito de mediatriz de um segmento de recta e as suas diversas propriedades, explorando-se, para tal, algumas das potencialidades de um *software* de Geometria dinâmica, o *GeoGebra*.

4.ª Aula (15 de Março de 2010)

Nesta aula pretendia introduzir a noção de circuncentro de um triângulo. Procurava-se, desta forma, ir ao encontro de alguns dos objectivos do *Novo Programa do Ensino Básico* (2007) e preparar os alunos para o subtema a tratar a seguir, tendo em conta o trabalho efectuado na aula anterior.

Um dos primeiros momentos planeados para esta aula foi a discussão de uma tarefa, proposta como trabalho de casa, cujo objectivo era determinar a intersecção das mediatrizes de dois segmentos, concluindo que o ponto encontrado seria equidistante dos três pontos que correspondiam aos extremos desses mesmos segmentos. A discussão da referida tarefa servia de introdução ao trabalho a efectuar ao longo da aula, através do qual surgiria a noção de circuncentro de um triângulo.

Visando a introdução deste mesmo conceito, planeou-se que à discussão mencionada se seguiria a realização de um problema contextualizado na realidade, em que os alunos deveriam determinar a localização ideal para um edifício que se pretendia construir a igual distância de três cidades. Nesta tarefa, composta por duas alíneas, procurava-se que, primeiro, os alunos encontrassem a solução para o referido problema, e, depois, numa segunda alínea, explorassem as situações em que, para quaisquer outras três cidades, este problema teria ou não solução.

Para que a segunda alínea da referida tarefa resultasse numa exploração produtiva, planeei um momento de discussão a realizar antes da resolução da mesma. Desta forma, seria apresentada e discutida a solução do problema, antes de serem exploradas as situações em que esta pode ou não existir, possibilitando que todos os alunos fizessem esta mesma exploração conhecendo a solução correcta para o problema. Assim, apesar do conceito de circuncentro de um triângulo surgir na resolução da primeira alínea, este só seria introduzido na discussão resultante da segunda, evidenciando e justificando que, de facto, um ponto em tais condições, só existe quando estamos perante um triângulo.

Com esta tarefa os alunos ficariam a conhecer as noções de circuncentro de um triângulo e de circunferência circunscrita a um triângulo. Contudo, o circuncentro que surgiria na resolução da mesma estaria no interior do triângulo e eu não queria que os alunos adquirissem a ideia, errada, de que tal ocorreria sempre. Com este intuito, idealizei a realização e discussão de uma segunda tarefa em que os alunos deveriam averiguar em que casos o circuncentro de um triângulo se encontra no seu interior, exterior, ou sobre um dos seus lados.

Para realizar esta tarefa, a utilização do *GeoGebra* seria uma mais-valia, na medida em que, construindo apenas um triângulo e o seu circuncentro, os alunos poderiam fazer variar a sua construção e, simplesmente, observar o que ocorria, sem a necessidade de reproduzir repetidamente a situação apresentada, em busca de uma conclusão. Portanto, foi esse o recurso pensado para a resolução desta tarefa.

Já para a outra tarefa a realizar em aula, o referido recurso não trazia vantagens superiores às do material de desenho, no que diz respeito à primeira alínea. No entanto, na exploração prevista para a segunda alínea não ocorria o mesmo, pois o *GeoGebra* permitia que se partisse da solução encontrada na primeira alínea e, fazendo variar a posição dos pontos correspondentes às três cidades, se explorassem diversas situações possíveis. Por isso, reconhecidas estas vantagens, optei por planear a utilização do referido *software* em ambas as alíneas desta tarefa, construindo um ficheiro a partir do qual os alunos iriam trabalhar (Anexo II, Figura 18).

Assim, esta aula foi planeada procurando promover explorações em torno do conceito de circuncentro de um triângulo, recorrendo às potencialidades da utilização do *GeoGebra*.

5.ª Aula (22 de Março de 2010)

Esta aula foi planeada com o intuito de trabalhar as noções de intersecção e reunião de conjuntos. Pretendendo que, desta forma, fossem introduzidos conceitos referidos no *Programa de Matemática do 3º ciclo do Ensino Básico* (1991), mas também, preparar os alunos para o que será tratado aquando abordada a recta real (9.º ano).

A primeira tarefa formulada para este efeito consistia num problema contextualizado na realidade constituído por duas alíneas, sendo a primeira das quais destinada à introdução do conceito de intersecção de conjuntos (conjunção de condições) e a segunda, à introdução da noção de reunião de conjuntos (disjunção de condições). Portanto, na discussão decorrente desta tarefa pretendia abordar estes conceitos, explicitando as condições do enunciado, os conjuntos correspondentes às mesmas, e ainda representando as condições/conjuntos solução utilizando os símbolos matemáticos adequados.

Em ambas estas alíneas, estavam apenas envolvidas duas condições associadas ao conceito de circunferência, e as soluções encontradas correspondiam a conjuntos com diversos pontos. Por isso, pensei que seria apropriado propor uma segunda tarefa com o intuito de ilustrar que as noções introduzidas poderiam surgir noutras situações. Assim, adaptei um problema proposto num Teste Intermédio do 8.º ano de escolaridade que consistia na intersecção de três condições. Esta intersecção seria um único ponto que poderia ser encontrando de diversas formas, envolvendo, uma delas, dois dos conceitos abordados nesta unidade (circunferência e mediatriz de um segmento de recta).

Dado que esta tarefa surgiria após a introdução dos novos conceitos, pretendia que, na discussão decorrente da mesma, estes fossem consolidados. Para isso, procurava que os alunos identificassem e representassem as condições e lugares geométricos envolvidos na mesma, e, também, que reconhecessem que a situação apresentada correspondia a uma intersecção (conjunção) de conjuntos (condições).

Ambas as tarefas a propor poderiam ser realizadas utilizando material de desenho, sendo, até, algumas delas dificilmente concretizadas recorrendo ao *GeoGebra*. Por isso, optei pelo uso do primeiro, o que me permitiria escolher uma forma de trabalho diferente da até aqui utilizada: o trabalho em grupo. Contudo, esta mudança não deveria surgir, simplesmente, por haver essa oportunidade, mas também pelas características das tarefas a propor. Os enunciados das tarefas a resolver durante a aula tinham expressões cuja interpretação poderia suscitar discussões interessantes, tais como "não me afastei mais de 50 [metros] ", que poderia levar alguns alunos a pensar que o afastamento foi de menos de 50 metros, e outros a concluir que este seria de 50 metros ou menos. Por isso, pensei que colocar os alunos a trabalhar em grupos de quatro seria a melhor opção para estas tarefas, uma vez que, desta forma, seriam confrontados com opiniões diferentes, potencializando a sua capacidade de comunicação, argumentação e reflexão sobre a interpretação do enunciado, que constitui uma etapa fundamental à resolução dum problema.

Desta forma, esta aula foi prevista com a intenção de introduzir as noções de conjunção e disjunção de condições, mas também promover o trabalho em grupo, essencial ao desenvolvimento de capacidades preconizadas nos diversos documentos curriculares.

6.ª Aula (25 de Março de 2010)

Sendo a última aula destinada à unidade Lugares Geométricos, esta aula foi planeada com o objectivo de consolidar os conceitos essenciais abordados na unidade. Isto é, procurei que nesta aula surgissem situações de intersecção de conjuntos, envolvendo diversos lugares geométricos.

Com este objectivo, e tendo em conta a duração da aula, de apenas 45 minutos, inicialmente pensei que nesta seria corrigido o trabalho de casa e proposta a realização de uma ficha de trabalho. Contudo, devido ao não cumprimento do plano da aula anterior a esta, a planificação foi alterada de modo a tornar possível a discussão da última tarefa proposta nessa mesma aula, abdicando-se da resolução da referida ficha. Nesta aula seriam, então, discutidas duas tarefas, a proposta como trabalho de casa, e a realizada na aula anterior.

A tarefa proposta como trabalho de casa seria um problema contextualizado na realidade envolvendo a intersecção de dois conjuntos associados ao conceito de mediatriz. Logo, para ir ao encontro dos objectivos desta aula, era importante discutir-se uma tarefa em que surgissem outros conceitos, o que seria possível quer com a ficha de trabalho, quer com a tarefa realizada na aula anterior. No entanto, seleccionei a segunda opção porque, além de os alunos já terem realizado essa tarefa, nela estariam envolvidas três condições cuja conjunção daria origem a um único ponto, e, na discussão decorrente desta, poderiam surgir diferentes conceitos, consoante a estratégia adoptada. Enquanto na ficha de trabalho, a tarefa a realizar envolveria apenas duas condições – ambas associadas à noção de circunferência e cuja conjunção corresponderia a um conjunto com diversos pontos – assemelhando-se ao que tinha sido realizado na aula anterior. Escolhi a opção que permitiria aos alunos o contacto com situações diferentes das por eles já trabalhadas, procurando que adquirissem uma visão mais abrangente da intersecção de lugares geométricos.

Para finalizar a aula, e a respectiva unidade, pensei num momento cujo objectivo seria salientar a importância da interpretação dos enunciados das tarefas, pois, ao longo das aulas, verifiquei que alguns dos alunos não lhe davam a devida importância. Por vezes, pensavam, mesmo antes de ler o seu enunciado, que não seriam capazes de realizar determinas tarefas, porque a "matéria não tinha sido dada".

Desta forma, para este momento da aula, previ a apresentação das soluções de duas tarefas realizadas no âmbito da unidade Lugares Geométricos, propostas antes de se trabalhar o último subtema, mas envolvendo os conceitos nele trabalhados (conjunção e disjunção de condições). Assim, pretendia mostrar aos alunos que, mesmo antes de a "matéria ter sido dada", eram capazes de resolver correctamente tarefas onde esta surgia, simplesmente devido a uma boa interpretação do enunciado das mesmas.

A última aula da unidade Lugares Geométricos foi, então, planeada com o intuito de promover a consolidação de conhecimentos, permitindo o contacto com situações diferentes, mas associadas a um mesmo subtema.

Síntese das aulas

As aulas leccionadas na unidade Lugares Geométricos nem sempre decorreram de acordo com o planeado, impossibilitando a concretização de alguns dos objectivos e situações previstos (Anexo I). Seguidamente, apresentam-se as sínteses dessas mesmas aulas, salientando as diferenças entre o planeado e o concretizado.

1.ª Aula (8 de Março de 2010)

Esta aula foi planeada de modo a que fosse introduzido o conceito de lugar geométrico, partindo de algo já conhecido pelos alunos: círculo e circunferência; e que fossem resolvidos e discutidos problemas envolvendo estes conceitos. No entanto, apesar de todas as tarefas terem sido realizadas e corrigidas, nem todos os objectivos foram completamente conseguidos.

A aula não começou da melhor forma, pois a maioria da turma chegou à sala com um atraso, condicionando o tempo disponível para a concretização da mesma. Assim, a realização da primeira tarefa da ficha proposta foi iniciada 10 minutos depois do previsto, perdendo-se tempo precioso que dificilmente poderia ser recuperado.

Durante a realização desta mesma tarefa, percebi que o ritmo da turma estava longe de ser homogéneo, havendo um número significativo de alunos que precisava de mais tempo que os restantes para concluir a referida tarefa. Por este mesmo motivo, procurando que a maior parte da turma pudesse participar da discussão tendo a sua própria resolução, disponibilizei mais tempo para a realização da tarefa, atrasando, ainda mais, o percurso da aula. Desta forma, chegado o momento de discussão em grande grupo, procurei, erradamente, recuperar este atraso, acabando por despender menos tempo que o previsto com o mesmo, em prole do não aprofundamento das questões que surgiram durante a discussão.

Assim, após este momento, a diferença temporal entre o planeado e o efectuado estava menos acentuada, o que me permitiria, aparentemente, recuperar o plano de aula e cumprir convenientemente o previsto, mas não foi isso que aconteceu. Tal como ocorreu na primeira tarefa, durante a realização das duas outras que compunham a ficha, foi necessário mais tempo que o planeado para que a maioria da turma obtivesse uma solução; repetindo-se o processo de limitar e minimizar as discussões delas decorridas para procurar a concretização de todo o plano.

Concluída a aula, o plano parecia ter sido cumprido. Contudo, a má gestão do tempo impediu que, nas discussões efectuadas, fossem feitas explorações mais profundas das tarefas propostas, não tendo sido suficientemente promovida a capacidade de justificar os processos e estratégias envolvidos nas mesmas. Logo, apesar de aparentemente concretizado, o plano não foi cumprido, uma vez que as discussões ficaram longe de decorrer conforme o planeado, impossibilitando a concretização de um dos objectivos desta aula.

2.ª Aula (11 de Março de 2010)

O plano desta aula foi elaborado com o intuito de, nela, serem trabalhados os conceitos de esfera e superfície esférica (lugares geométricos no espaço), começando pela introdução dos mesmos a partir da resolução dos trabalhos de casa, seguida da sua aplicação na realização de uma ficha de trabalho. No entanto, estava prevista a possibilidade da não concretização desta mesma ficha, em virtude do prolongamento da correcção dos trabalhos de casa, tal como se veio a verificar.

Iniciada a aula, procedi à recolha dos trabalhos de casa dos alunos, apercebendo-me que alguns não os tinham realizado e que existiam dúvidas por parte de quem os tinha feito. Assim, parti para a discussão decorrente da tarefa feita em casa, ciente de que esta seria mais longa que o planeado, mas, também, de que seria o momento fulcral da aula, uma vez que, sem ele, seria absurdo passar ao seguinte.

Tal como planeado, começou a ser discutido o trabalho de casa, sendo a primeira alínea corrigida a referente ao abordado na aula anterior, pelo que não esperava que levantasse dúvidas. Contudo, não foi isso que aconteceu, acabando por surgir dificuldades que prolongaram a correcção da mesma, o que me levou a contrariar o previsto, solicitando a colaboração de um outro aluno para a correcção da alínea que se seguia, a fim de evitar uma discrepância nas oportunidades de exposição dos alunos.

Continuando a discussão dos trabalhos de casa, passando à correcção das alíneas relativas aos conceitos que procurava introduzir, deparei-me com as dificuldades que tinha diagnosticado aquando da recolha destes trabalhos. Portanto, procurando que estas fossem superadas, sem deixar de lado o objectivo a que me propunha (introduzir dois novos conceitos), tornei este momento muito mais longo que o planeado, ocupando o resto da aula, sem que houvesse espaço para a realização da ficha de trabalho, indo ao encontro do que estava salvaguardado no plano de aula.

Assim, com esta aula, apesar de não terem sido concretizados todos os momentos planeados, foram cumpridos os objectivos previstos. Pois, com a ficha que não foi proposta procurava consolidar estes mesmos objectivos e não alcançar outros. Logo, o plano de aula não deixou de ser cumprido, na medida que optei por um caminho previsto no mesmo, que possibilitou atingir os objectivos, abdicando de um outro momento da aula que só faria sentido após a concretização dos mesmos.

3.ª Aula (12 de Março de 2010)

Nesta aula estava previsto recorrer ao *GeoGebra* para introduzir o conceito de mediatriz de um segmento de recta e explorar as propriedades da mediatriz da corda de uma circunferência. Contudo, não se conseguiram concretizar todos os objectivos planeados com esse propósito.

Começada a aula, propus que os alunos realizassem a primeira tarefa da ficha a efectuar, deparando-me com um obstáculo: os computadores da sala onde nos encontrávamos não permitiam a utilização do *GeoGebra*. Pelo que, no decorrer da aula, os alunos teriam de usar material de desenho, contrariando o que estava previsto.

Contornado este obstáculo, foi iniciada, de forma um pouco atribulada, a resolução da referida tarefa, pois alguns alunos procuravam compreender o motivo para a alteração ocorrida, tentando, em vão, utilizar o programa, em vez de se focarem na concretização da ficha de trabalho. Assim, a resolução da primeira tarefa foi bastante mais demorada que o planeado, não estando concluída após os primeiros 45 minutos de aula.

Chegado o momento de discussão da tarefa, tal como previsto, recorri ao meu computador, ligado ao *DataShow*, para ilustrar as conclusões a que os alunos chegaram, mas também as propriedades da mediatriz de um segmento de recta. Surgia, então, uma dificuldade, não podendo reproduzir o que eu efectuava no *GeoGebra*, os alunos não comprovavam por si mesmos estas propriedades. Logo, não querendo que estas fossem simplesmente expostas, optei por procurar equilibrar a situação, utilizando o *GeoGebra* para os fazer deduzir as mesmas e também para ilustrar os casos que surtiam dúvidas, tendo em conta as sugestões apresentadas pelos alunos.

Assim, terminada a aula, apenas tinha sido realizada e discutida a primeira tarefa da ficha de trabalho, não se tendo efectuado a exploração das propriedades da mediatriz da corda de uma circunferência. Em consequência disso, nesta aula, não foram cumpridos os objectivos relacionados quer com o recurso que se pretendia utilizar, quer com a segunda tarefa a propor.

Desta forma, claramente, o plano de aula não foi cumprido. Pois, apesar de os objectivos relacionados com a segunda tarefa não constarem do programa, a sua concretização tinha uma intenção, a de promover uma situação de exploração que serviria de ponte entre os conteúdos trabalhados e os que, futuramente (9.º ano), os alunos abordarão; e isso não foi conseguido.

4.ª Aula (15 de Março de 2010)

Esta aula foi planeada de modo a que fosse introduzido o conceito de circuncentro de um triângulo e exploradas as situações em que este se encontra no interior, no exterior, ou sobre um dos lados do triângulo. No entanto, nem tudo isto foi possível, não se tendo cumprido a totalidade dos objectivos da aula.

A aula foi iniciada com a correcção dos trabalhos de casa, propostos com o objectivo de levar os alunos a concluir que o ponto de intersecção de duas mediatrizes de segmentos de recta é equidistante dos extremos destes. Portanto, este momento da aula era a etapa preparatória para a tarefa que daria origem à introdução de um novo conceito, pelo que era importante que todos os alunos chegassem à conclusão pretendida. Assim, procurando cumprir este objectivo, a discussão decorrente dos trabalhos de casa foi mais longa que o planeado, tendo sido nela incluídas situações não previstas, mas consideradas relevantes para o progresso da aula, como a revisão das propriedades da mediatriz de um segmento de recta.

Continuando a aula, seguiram-se, tal como planeado, a realização e discussão da primeira alínea da ficha de trabalho a efectuar, e a resolução da segunda alínea desta mesma ficha. Durante esta última etapa, apercebi-me que a turma estava, de certa forma, dividida, havendo alunos que concluíram que o problema teria sempre solução, e outros que encontraram situações em que tal não ocorria. Assim, ao contrário do previsto, revolvi tirar proveito desta divergência, seleccionando dois alunos com opiniões diferentes para expor a sua resolução perante a turma. Na discussão da referida alínea, começou-se, então, por apresentar a resposta incorrecta, e, partindo dela, foi exposta a correcta, apresentando-se os motivos que a sustentavam. Logo, embora de forma ligeiramente diferente que a planeada, a discussão referida serviu os seus propósitos, pois através dela foi possível explorar o problema e introduzir o conceito de circuncentro de um triângulo.

Assim, passaram-se os 90 minutos da aula sem realizar tudo o que pretendia, na sequência do não cumprimento do tempo previsto para a correcção dos trabalhos de casa. Pelo que, apesar de terem sido alcançados aqueles que eram os objectivos principais para esta aula, os objectivos relacionados com a tarefa por efectuar não foram concretizados e o plano não foi cumprido.

5.ª Aula (22 de Março de 2010)

Para esta aula estavam planeadas a introdução das noções de intersecção e disjunção de conjuntos, partindo de uma tarefa efectuada pelos alunos; e a realização de uma outra tarefa onde seriam aplicados estes conceitos. Contudo, a aula não decorreu como o previsto, não tendo sido cumpridos todos estes objectivos.

Iniciada a aula, os alunos reuniram-se em grupos de quatro e resolveram, dentro do tempo previsto, a primeira tarefa que lhes foi proposta. Seguiu-se a discussão da mesma, durante a qual eu pretendia introduzir os novos conceitos a abordar.

Neste momento da aula, para cada uma das alíneas da tarefa, foi apresentada a resolução efectuada por um dos grupos de trabalho. Mas, ao contrário do previsto, não se recorreu ao *GeoGebra* para o fazer, pois preferi que os alunos se concentrassem na exposição das suas conclusões, e não no modo de as representar com um recurso diferente do utilizado aquando da formulação das mesmas.

Alterando, também, o previsto, chegada a ocasião de discutir a segunda alínea da tarefa já referida, pedi ao aluno que ia expor a resolução do seu grupo, para iniciar a apresentação da mesma identificando e escrevendo as condições do enunciado. Afinal, eu já tinha efectuado essas etapas ao analisar a alínea anterior, salientando a importância de as efectuar como primeiros passos para a resolução de um problema.

Partindo das resoluções expostas, foram discutidos mais aspectos do que os previstos, uma vez que, enquanto os alunos realizavam a tarefa, senti que existiam dúvidas em relação ao significado de expressões como “pelo menos”, e aproveitei este momento em grande grupo para as debater e esclarecer. Além disso, durante a discussão, as intervenções de alguns alunos evidenciaram falhas na aquisição dos pré-requisitos desta aula, pelo que foram revistas as definições de alguns deles.

Assim, na discussão resultante da primeira tarefa proposta em aula foram incorporadas mais situações que as planeadas, prolongando a duração da mesma. Apercebendo-me que, como consequência disso, o final da aula estava próximo, não sendo possível realizar a tarefa seguinte, optei por procurar aprofundar os novos conceitos introduzidos, representando alguns lugares geométricos no quadro e pedindo a colaboração da turma para identificar a intersecção e reunião dos mesmos.

Desta forma, a aula foi dada por concluída sem que fossem realizadas todas as tarefas planeadas, nem utilizado um dos recursos previstos (*GeoGebra*), não tendo sido cumpridos os objectivos associados a estes dois aspectos.

6ª Aula (25 de Março de 2010)

Esta aula foi a última em que se trabalhou o tema Lugares Geométricos. Por este motivo, foi planeada com o principal objectivo de promover a consolidação dos conhecimentos adquiridos ao longo do tema, através da discussão de duas tarefas envolvendo a intersecção de conjuntos e da revisão de aspectos interessantes de algumas das tarefas concretizadas em aulas anteriores.

A primeira tarefa discutida tinha sido realizada pelos alunos como trabalho de casa. Por isso, ao iniciar este momento foi relembrado o enunciado do problema e identificadas as condições envolvidas no mesmo. Após escritas estas condições no quadro, o aluno que expunha a sua resolução explicou como a reproduzir recorrendo tanto ao *GeoGebra*, como a material de desenho, mas, tal como previsto, apresentou-a utilizando o primeiro. Terminada a exposição do aluno, os restantes elementos da turma tiveram oportunidade de fazer comentários e colocar dúvidas. Enfim, foram concretizadas as várias etapas planeadas para este momento, dentro do tempo previsto.

A segunda tarefa discutida fazia parte da ficha proposta na aula anterior e tinha sido resolvida por muitos dos alunos durante a mesma, apesar de não se ter concretizado o momento destinado a essa etapa. Assim, tal como ocorreu com a discussão do trabalho de casa, neste momento começou-se por ler e interpretar o enunciado da tarefa. De seguida, um aluno expôs a sua resolução recorrendo ao *GeoGebra*, mas, ao contrário do previsto, não escreveu as condições do problema, uma vez que esse processo se tornava repetitivo e os alunos já tinham identificado correctamente as condições em causa.

Concluída a discussão, apresentei, usando o *DataShow*, duas resoluções de tarefas anteriormente trabalhadas, sendo a solução de uma delas resultante da reunião de conjuntos, e a da outra proveniente da intersecção de conjuntos. Com este momento procurei salientar que, mesmo antes de conhecerem estes dois conceitos, os alunos se tinham defrontado com eles e sido bem sucedidos porque tinham interpretado correctamente os enunciados em que estes surgiam.

Deste modo, à excepção de um ponto e da ordem de algumas etapas do plano de aula, penso que este foi cumprido, tendo sido concretizados os diversos objectivos previstos no mesmo.

Métodos e procedimentos de recolha de dados

No estudo desenvolvido, os papéis de investigar e leccionar recaíram sobre mim, o que tornou o meu desempenho algo complexo, pois a recolha de dados durante a prática lectiva poderia pôr em causa o meu papel enquanto professora. Desta forma, a referida recolha foi pensada de modo a não prejudicar o meu papel de professora, mas, simultaneamente, não comprometendo o estudo que iria realizar. Para tal foram utilizados os três métodos de recolha de dados que a seguir se apresentam: observação com registo áudio, aplicação de um questionário e recolha documental. Esta diversidade de métodos vai ao encontro do que é recomendado para estudos de natureza predominantemente qualitativa (Bodgan & Biklen, 1994), como é o caso deste.

Observação com registo áudio

A observação com registo áudio do trabalho realizado por dois grupos de alunos (grupos formados para a utilização do *GeoGebra*) foi seleccionada como método de recolha de dados porque a considerei essencial para responder às questões do estudo. Trabalhando a pares ou em grupo, os alunos teriam oportunidade de discutir os conceitos a utilizar, as dificuldades apresentadas e as opções tomadas relativamente às estratégias e à utilização dos instrumentos disponíveis; o que, nem sempre, é transmitido nas resoluções escritas apresentadas. Por outro lado, com o registo áudio já não necessitaria de tirar notas muito completas, podendo concentrar-me mais nas minhas funções de professora e evitando que esses alunos ficassem intimidados com o meu interesse particular no que diziam ou faziam (Bogdan & Biklen, 1994).

Assim, antes de começar a minha intervenção, seleccionei os dois pares de alunos cujo diálogo seria registado. Para tal, tive em conta o que observei ao longo das aulas em que estive em contacto com os alunos, pois, através delas pude detectar os pares em que a interacção é mais rica em relação ao trabalho efectuado, ou seja, aqueles que, potencialmente, poderiam contribuir com dados mais interessantes para os registos efectuados. Iniciada a minha intervenção e, consequentemente, o registo áudio destes dois grupos de alunos, apercebi-me que as discussões existentes num deles não tinham sido captadas em boas condições, pelo que não eram suficientemente audíveis. Por esse motivo, a análise efectuada centrou-se apenas na interacção do outro par (Clara e Madalena[1]).

A Madalena é uma das novas alunas integradas na turma, tendo sido bem acolhida por todos os elementos da mesma, incluindo a sua colega de carteira, a Clara. Através do contacto que tive com este par de alunas ao longo das aulas, pude observar que são bastante empenhadas. Ambas as alunas, ao apresentarem dúvidas que não conseguem esclarecer entre elas, não hesitam em solicitar a ajuda do professor, sendo a Madalena, em particular, bastante determinada neste aspecto. Além disso, são as duas bastante organizadas com os seus cadernos diários e a Madalena transcreve para o mesmo todas as correcções apresentadas no quadro, independentemente de as suas estarem correctas ou não. Por estes motivos, entre outros, a Clara e a Madalena apresentam boas classificações na disciplina de Matemática, sendo as suas notas relativas ao segundo período 5 e 4, respectivamente.

Aplicação de um questionário

Procurando resposta à terceira questão apresentada no capítulo introdutório deste estudo, para identificar as vantagens e desvantagens que os alunos reconhecem na utilização dos dois recursos utilizados (material de desenho e *GeoGebra*), resolvi aplicar, também, um questionário (Anexo III) em que procurei aprofundar este aspecto. Com este questionário, proposto a todos os alunos, procurei compreender as vantagens e desvantagens que encontraram no uso de ambos os recursos e, também, o modo como estes condicionaram, ou não, as estratégias desenvolvidas na resolução de problemas. Optei pelo questionário e não por uma entrevista centrada nestas questões, devido à inviabilidade de realizar entrevistas a todos os alunos e, também, porque sendo o questionário anónimo, os alunos podem expressar-se sem inibições ou constrangimentos. Assim, para tornar proveitoso o uso deste instrumento, este foi aplicado após terminada a leccionação da unidade, mais concretamente, na última aula de Matemática do segundo período (dia 26 de Março de 2010), uma vez que, nesta altura o contacto dos alunos com os recursos era o suficiente para que fossem capazes de emitir uma opinião.

[1] Nomes fictícios.

No capítulo seguinte, “Análise de dados”, são consideradas apenas algumas das questões propostas neste questionário, devido à impossibilidade de considerar o grande número de perguntas que constam do mesmo. Seleccionei, então, as que mais contribuem para o esclarecimento dos aspectos a que se destinava o questionário, ou seja, as que mais directamente se relacionavam com as vantagens e desvantagens da utilização dos recursos disponibilizados (2, 3, 7 e 8) e aquela se refere, explicitamente, à influência desses recursos na selecção das estratégias utilizadas na resolução de problemas (11).

Recolha documental

Aos instrumentos já mencionados, juntei ainda a análise de algumas tarefas e dos resultados do Teste Intermédio. A análise das tarefas, tanto das elaboradas em papel como das realizadas com o *GeoGebra*, foi planeada porque através desta poderia também perceber quais as maiores dificuldades dos alunos, as estratégias por eles utilizadas e, consequentemente, os conceitos mobilizados por estes. Logo, este método poderia ser útil para procurar dar resposta a duas das questões em estudo, pelo que, após leccionada a unidade Lugares Geométricos, foi feita a selecção de três tarefas, cuja análise se encontra no capítulo seguinte.

Com estas três tarefas (apresentadas no Anexo II) procuro representar o trabalho efectuado ao longo da unidade, considerando diferentes subtemas da mesma, a maioria dos conceitos abordados e os principais recursos utilizados (*GeoGebra* e material de desenho). Para tal, seleccionei uma tarefa de cada subtema, tendo duas delas, a Tarefa 1 da ficha n.º 9 e a Tarefa 2 da ficha n.º 13, sido realizadas com material de desenho e a outra, a Tarefa 1 da ficha n.º 12, recorrendo ao *GeoGebra*.

Apesar de todos os alunos da turma terem realizado estas tarefas, centro a análise das mesmas no caso particular das alunas Clara e Madalena. Como já foi referido, as discussões deste par foram recolhidas sob a forma de registo áudio, o que complementa os dados relativos à sua resolução escrita das três tarefas mencionadas. Logo, seria oportuno focar a análise das tarefas neste par, enriquecendo-a com os dados obtidos através do seu registo áudio.

Para reflectir sobre o desempenho dos alunos na unidade por mim leccionada, considerei os resultados que estes apresentaram no Teste Intermédio de 24 de Abril de 2010 (Anexo IV), na questão (15) que dizia respeito à temática em estudo, dado que este foi o primeiro momento de avaliação ocorrido após terminada a minha intervenção. Este teste foi corrigido pela professora de Matemática da turma considerada no estudo, que me forneceu a grelha de classificações em que se baseia a análise apresentada no capítulo seguinte. Nessa análise não considerei as resoluções escritas do teste, uma vez que este teve de ser entregue aos alunos dentro de um determinado prazo, durante o qual se deu a correcção do teste, pelo que não me foi possível aceder e analisar essas resoluções.

Análise de dados

Com vista a procurar respostas às questões formuladas neste estudo, foram analisadas três tarefas matemáticas, um questionário e os resultados relativos a um momento de avaliação. Seguidamente, apresenta-se cada uma destas análises, em que foram considerados diferentes aspectos, tendo em conta a natureza dos dados e as respostas a que estes se adequam.

Tarefas

Indo ao encontro das questões formuladas na introdução deste relatório, na análise das três tarefas seleccionadas (disponibilizadas no Anexo II) procurei identificar as diferentes estratégias utilizadas pelos alunos e as principais dificuldades sentidas pelos mesmos, tendo em conta a forma como o recurso utilizado afectou a actividade dos alunos. Para isso, a análise feita é particularizada num caso, o do par Clara e Madalena, visto que foram feitas gravações áudio das discussões entre as alunas, aquando da realização das tarefas.

De seguida, apresenta-se a análise de cada uma das tarefas seleccionadas. Para cada uma delas, começo por referir e analisar o que ocorreu, de forma geral, com a turma e, posteriormente, com o par Clara e Madalena.

Tarefa 1 – Ficha n.º 9[2]

A Tarefa 1 da ficha n.º 9 foi realizada na aula de 8 de Março de 2010, em que os alunos trabalharam a pares e utilizaram material de desenho. Esta tarefa é composta por duas alíneas através das quais se pretendia introduzir os conceitos de circunferência (a) e círculo (b). Para isso, em cada uma destas, os alunos tinham de determinar os locais possíveis para a colocação de um *router,* de acordo com as instruções de um assistente.

---

[2] A numeração das fichas desta unidade dá continuidade à utilizada nas fichas propostas antes da leccionação da mesma, pela professora titular da turma.

O trabalho na turma

Alínea a)

Na alínea a) esperava-se que, interpretando o problema, os alunos identificassem o conjunto dos locais onde o *router* poderia estar (a 7 metros do computador), como sendo a circunferência de centro no computador (representado pelo ponto *C*) e raio 7 metros, e a construíssem de acordo com a escala (1:200). De facto, os alunos começaram por fazer a conversão da medida real (7 metros) à que lhe correspondia no desenho (3,5 centímetros), utilizando a escala de forma correcta. Mas o mesmo não aconteceu quanto à solução do problema.

A grande maioria da turma identificou um único local onde poderia ser colocado o *router*, assinalando um ponto a 3,5 centímetros de *C*. Afinal, no problema perguntava-se onde poderia ser colocado este aparelho e os alunos indicaram um possível local. Portanto, estes alunos responderam parcialmente à questão, mas não abrangeram todas as possibilidades, limitando-se a uma única escolha.

Apesar disso, dois dos pares de alunos identificaram a solução correcta para o problema, construindo a circunferência de centro *C* e raio 3,5 centímetros, mas, na sua resolução, não apresentaram qualquer justificação para tal facto. Contudo, durante a discussão desta alínea, um destes alunos, quando questionado acerca do motivo que o levou à sua resposta, disse: “Porque todos os lugares a 7 metros de *C* eram possíveis”, mostrando que fez uma boa interpretação do problema e compreendeu como obter a representação de todos os pontos em causa.

Assim, na resolução desta alínea foram muitos os alunos que não identificaram o lugar geométrico, circunferência, como o conjunto solução do problema.

Alínea b)

Tal como na alínea a), na b) esperava-se que, após interpretarem o problema, os alunos identificassem todos os locais onde o *router* poderia estar e construíssem o lugar geométrico correspondente de acordo com a escala (1:200). Mas, desta vez, as condições do problema indicavam que este aparelho deveria ser colocado a uma distância máxima de 5 metros do computador, pelo que poderia estar em qualquer dos pontos do círculo de centro no computador (ponto *C*) e raio 5 metros.

Nesta alínea, mais uma vez, antes do momento de discussão em grande grupo, todos os alunos conseguiram determinar a medida que, no desenho, correspondia aos 5 metros reais (2,5 centímetros). No entanto, a maioria da turma cometeu o mesmo erro efectuado na alínea anterior, identificando uma possível solução através da marcação de um só ponto nas condições referidas, havendo apenas dois pares de alunos que optaram por uma diferente resolução.

Um desses pares de alunos apresenta dois pontos, ambos a 2,5 centímetros de *C*, como solução para o problema, o que mostra que este par percebeu que existe mais do um que um local possível para a colocação do *router*. Contudo, esta percepção não foi suficiente para que encontrassem a solução correcta do problema, embora a continuação do raciocínio apresentado, marcando mais pontos nas condições enunciadas, pudesse conduzi-los à identificação do lugar geométrico que a constitui.

Já o outro par interpretou correctamente o problema, demonstrando-o não só na resolução apresentada, mas também durante a discussão desta alínea, onde um dos seus elementos explicou a solução encontrada: "Eu fiz a circunferência e como no enunciado diziam que era o máximo, todos os locais a 5 metros e menos de 5 davam, por isso pintei a circunferência". Logo, este par começou por construir a circunferência de centro *C* e raio 2,5 centímetros e, percebendo que assim só representavam os locais a 5 metros do computador, coloriram o interior da circunferência para incluir os restantes pontos que constituem a solução do problema (círculo de centro *C* e raio 5).

Desta forma, tal como na alínea anterior, foram muitos os alunos que revelaram dificuldades na interpretação do problema, representando pontos incluídos na solução do mesmo, mas não a totalidade desta.

A resolução de Clara e Madalena

Nesta tarefa, em ambas as alíneas, a Clara e a Madalena apresentaram, não só, os cálculos que as conduziram às medidas a utilizar no desenho, respeitando a escala, mas também, as soluções correctas. Isto é, na alínea a) construíram a circunferência de centro *C* e raio 3,5 centímetros e na b) o círculo de centro *C* e raio 2,5 centímetros. Contudo, quer o diálogo mantido por estas alunas aquando da realização da tarefa, quer as resoluções por elas apresentadas demonstram que estas soluções surgiram apenas após a discussão da tarefa.

Estas alunas começaram por resolver a alínea a) determinando a medida que, no desenho, corresponderia a 7 metros, tendo surgido algumas dúvidas, nomeadamente quanto à adequação da "regra de três simples" a esta situação. No entanto, após concluírem que poderiam utilizar essa mesma regra ou, simplesmente, dividir 700 por 200, sem discutirem o assunto, estas alunas representaram aquela que pensaram ser a solução da questão e partiram para a descoberta da medida a utilizar na alínea b), fazendo-o sem dificuldades.

Desta forma, as alunas em causa resolveram a tarefa rapidamente e sem discutirem as soluções encontradas, o que a dada altura produziu algumas incertezas na Madalena, que teceu o seguinte comentário: "Isto está a ser demasiado fácil, não achas?". Concordando com a Madalena, a Clara respondeu-lhe afirmativamente, mas não pôs em causa o efectuado, o que as levou a continuar a resolução da ficha de trabalho, sem fazerem uma segunda análise da tarefa em questão.

No entanto, através das resoluções apresentadas (Figura 4) percebe-se que esta rapidez não coincidiu com eficácia, visto que em ambas se consegue visualizar um ponto legendado como *router*, o que me leva a pensar que esta foi a solução primeiramente identificada por estas alunas. Portanto, estas resoluções evidenciam que as conclusões a que este par de alunas chegou, inicialmente, não são as correctas.

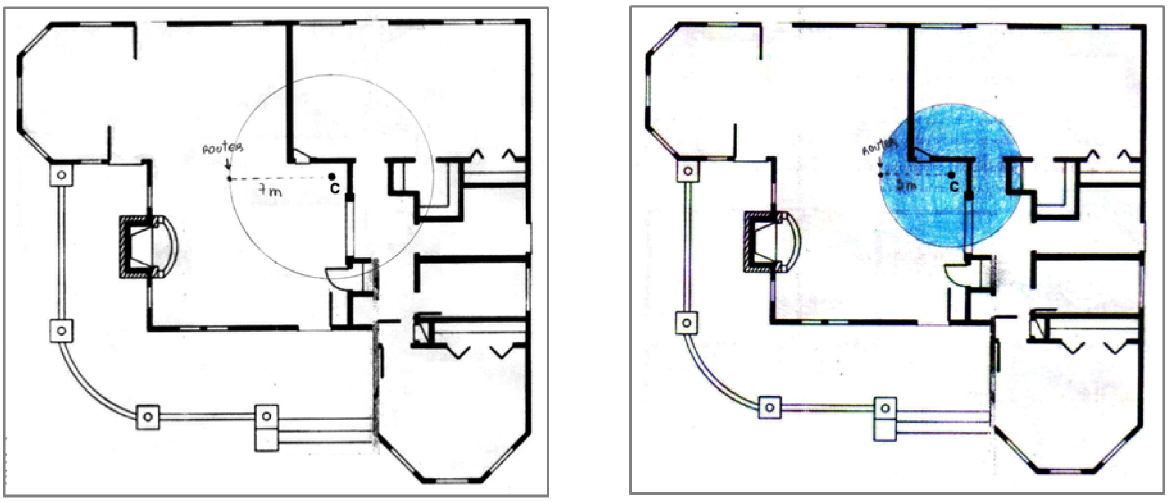


Figura 4 – Resolução das alíneas a), à esquerda, e b), à direita, da Tarefa 1.

Na exposição da alínea b), por parte da Madalena, tal também foi evidenciado, pois esta explicou que na situação em causa se aplicava o que tinha sido feito na anterior, pelo que a solução seria uma circunferência. Mas, quando questionada sobre a resolução efectuada antes da correcção da alínea a), a Madalena confessou ter identificado apenas um ponto como solução, indo ao encontro do que se observa na sua resolução. Logo, esta aluna mostrou algumas dificuldades em compreender o pedido, pois após observar a resolução de uma outra alínea, percebeu as semelhanças entre elas, mas só foi possível identificar as suas diferenças através da minha intervenção.

Assim, apesar deste par de alunas ter começado por determinar soluções incorrectas para ambas as alíneas desta tarefa, a discussão que decorreu da mesma permitiu-lhes tomar contacto com uma interpretação adequada desta, que as levou a ter em conta os detalhes que, inicialmente, passaram despercebidos, e permitiram efectuar a construção dos lugares geométricos correspondentes às soluções pretendidas.

Tarefa 1 – Ficha n.º 12

A Tarefa 1 da ficha n.º 12, realizada na aula de 15 de Março de 2010 por alunos que trabalharam a pares utilizando o *GeoGebra*, é composta por duas alíneas. Na primeira (1.1.) pretendia-se que os alunos encontrassem a solução para um problema: determinar o ponto equidistante a outros três não colineares (circuncentro). Já na segunda (1.2.) era proposta uma extensão do problema, procurando que se descobrissem os casos em que, para quaisquer três pontos, este tem ou não solução.

O trabalho na turma

Alínea 1.1.

Na Alínea 1.1. esperava-se que depois de interpretarem o problema, os alunos construíssem as mediatrizes dos segmentos cujos extremos seriam os pontos dados, encontrando a solução através da determinação do ponto de intersecção das mesmas. E foi exactamente isso que foi feito por grande parte da turma.

Contudo, um dos pares de trabalho não encontrou a solução esperada, tendo concluído que o edifico de medicina avançada iria ser construído em Évora, quando se pretendia que este se situasse a igual distância de Beja, Évora e Grândola. No entanto, com a discussão da tarefa, este mesmo par de alunos foi capaz de determinar a solução adequada ao problema, como se evidencia na resolução apresentada por este (Figura 5).

Tal facto leva-me a pensar que a resposta inicialmente dada surgiu na sequência de uma incorrecta interpretação do problema, que só foi compreendida quando este foi discutido.

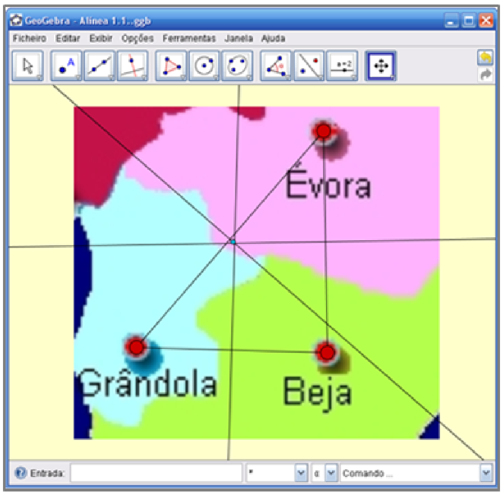


Figura 5 – Resolução da Alínea 1.1., feita pelo par que apresentou a solução errada.

Desta forma, a maioria da turma determinou correctamente o local onde deveria ser construído o referido edifício. Para tal, a estratégia utilizada foi praticamente unânime: marcar o ponto de intersecção de três mediatrizes de segmentos de recta, havendo somente um par que não o fez. Estes dois alunos optaram por construir apenas duas das mediatrizes de segmentos de recta e, após marcar o ponto de intersecção das mesmas (*D*), traçar os três segmentos em que uma das extremidades é esse mesmo ponto (*D*) e a outra um dos pontos correspondentes às cidades mencionadas na tarefa. Por fim, mediram os comprimentos destes três segmentos, verificando que eram iguais e, consequentemente, o ponto *D* seria o local procurado no problema.

Nesta estratégia, que diferia da utilizada pela maioria da turma, os alunos tiraram proveito das capacidades do *GeoGebra* para verificarem que o ponto encontrado estava à mesma distância das três cidades, o que ilustra o à-vontade que sentiram com este *software*. No entanto, nem todos os alunos foram capazes de utilizar o *GeoGebra* da melhor maneira, pois, apesar de todos terem conseguido construir as mediatrizes dos segmentos de recta, alguns não determinaram o ponto pretendido da forma correcta. Estes alunos limitaram-se a recorrer à ferramenta "*Novo ponto*" para marcar um ponto no local que consideraram adequado, fazendo com que este ficasse sobre apenas uma das mediatrizes, não estando, de facto, na intersecção das mesmas. O ideal seria terem utilizado a ferramenta "*Intersectar duas linhas*", escolher duas das mediatrizes construídas, e obter o ponto que ficaria definido como sendo a intersecção das mesmas, dado que era esta a forma de obter o pretendido.

Assim, na realização desta tarefa quase todos os alunos seguiram uma mesma estratégia, não tendo apresentado dificuldades na concretização da mesma, embora a utilização do recurso disponível (*GeoGebra*) não tenha sido feita da forma mais adequada.

Alínea 1.2.

Na Alínea 1.2. pretendia-se que os alunos utilizassem as construções efectuadas em 1.1. e, com a ferramenta "*Mover*", arrastassem os pontos correspondentes às cidades do problema, simulando diferentes situações que os auxiliariam na formulação de uma conjectura. Desta forma, procurava-se que os alunos explorassem as situações em que o problema da Alínea 1.1. teria ou não solução.

Tendo como ponto de partida a alínea anterior, alguns dos alunos depararam-se com um obstáculo: ao moverem os pontos correspondentes às três cidades, o ponto marcado em 1.1. não mantinha as suas propriedades, isto é, deixava de estar na intersecção das mediatrizes construídas. No entanto, este obstáculo foi contornado, uma vez que, ao observarem tal situação, os alunos perceberam que havia algo de errado com a marcação do ponto, tendo, alguns deles, esclarecido essa questão comigo, enquanto outros a resolveram sem o meu auxílio. Assim, estes alunos perceberam que não tinham usado a ferramenta mais adequada para marcar o ponto, acabando por repetir essa etapa, mas com a ferramenta "*Intersectar duas linhas*".

Ultrapassada esta situação, todos os alunos conseguiram formular uma conjectura, existindo duas vertentes. Por um lado, há os alunos que concluíram que o problema tinha sempre solução, e, por outro, os que afirmaram que há situações em que tal não ocorre.

Os pares que apresentam como conclusão que, para quaisquer três cidades, o problema tem solução, limitaram-se a analisar os casos em que os pontos, que representavam essas mesmas localidades, não são colineares. Portanto, a conjectura que formularam não deixa de ter algo de verdadeiro, uma vez que, as mediatrizes dos segmentos correspondentes aos lados de um triângulo se intersectam sempre num ponto equidistante aos vértices do mesmo.

Já os pares que encontraram situações para as quais o problema não tem solução, consideraram, também, os casos em que os pontos correspondentes às três cidades podem ser colineares. Assim, conseguiram abranger as diversas situações possíveis e chegar à conclusão pretendida.

No entanto, tendo em conta que, na sua maioria, os alunos apenas respondem à questão, não justificando, e que quando o procuram fazer, é de forma bastante concisa, é difícil perceber se estes compreenderam os motivos pelos quais as suas conjecturas são ou não verdadeiras, e também, os processos seguidos até à formulação das mesmas, sendo poucos os pares em que tal é uma excepção. Apesar disso, há um par que, não apresentando justificações, torna claro o raciocínio que permitiu formular uma correcta conclusão. Estes alunos optaram por medir um dos ângulos do triângulo que construíram em 1.1., movendo os vértices do mesmo de forma a fazer variar a amplitude desse ângulo. Deste modo, chegaram ao caso em que a amplitude do ângulo medido era igual a 0º, não havendo triângulo, nem solução para o problema.

Assim, com esta tarefa os alunos conseguiram formular uma conjectura, tendo surgido dificuldades, por parte de alguns, na identificação e exploração de todas as situações possíveis.

A resolução de Clara e Madalena

Na alínea 1.1. desta tarefa, a Clara e a Madalena concluíram que o ponto procurado estaria na intersecção das mediatrizes dos três segmentos de recta cujos extremos são duas das três cidades: Beja, Évora e Grândola. Estas alunas chegaram, então, à solução do problema, tendo respondido da seguinte forma:

> "O ponto *D* é o local onde se pode construir o edifício de medicina avançada, porque é equidistante das três cidades."

Na resposta, as alunas dizem que o ponto *D* (ponto de intersecção das três mediatrizes dos segmentos de recta já referidos) é equidistante das cidades mencionadas no problema. No entanto, o enunciado refere-se a um local equidistante a três localidades, pelo que o facto de ser dito que *D* está nessas condições, não mostra que, realmente, é solução do problema.

Desta forma, tentei perceber como é que estas alunas procederam para obter este resultado, constatando que este surgiu de forma natural e consensual. Após lerem o enunciado, a Clara sugeriu o seguinte: "Então e se fizermos a mediatriz deste, depois a mediatriz deste e depois a mediatriz deste?”. A Madalena aceitou esta sugestão, sem a questionar, tendo construído o ponto *D* a que se referem na solução, no local onde essas mesmas mediatrizes se intersectavam.

Assim, a solução foi encontrada, sem discussões nem argumentos, o que, vindo das alunas em questão, mostra que ambas não tinham dúvidas de que estavam correctas. Afinal, antes da realização desta tarefa, foi corrigido o trabalho de casa, tendo sido analisada uma situação semelhante à apresentada.

Na construção que efectuaram, o ponto *D* não foi marcado utilizando a ferramenta adequada, o que condicionou a realização da alínea seguinte, não tendo impossibilitado a sua concretização. Desta forma, na Alínea 1.2. este par de alunas chegou à conclusão que o problema teria sempre solução, procurando justificar tal facto apresentando a seguinte resposta:

> “Sim, porque o ponto que une as mediatrizes dos três pontos encontra-se sempre.
>
> Nós movemos um dos pontos para verificar se havia um local equidistante de outras três cidades, o que podemos concluir que é verdade e que em todos os casos é assim.
>
> Sempre que movíamos um dos pontos, o ponto médio estava sempre a unir todas as mediatrizes.”

Através desta resposta percebe-se que as alunas em causa não estão familiarizadas com a linguagem que se espera que usem, visto que utilizam a expressão “mediatrizes dos três pontos” e se referem ao ponto de intersecção destas mediatrizes como sendo “o ponto médio”. Contudo, esta linguagem não impede que, nesta mesma resposta, transpareçam a estratégia seguida e a conjectura formulada.

A estratégia utilizada por estas alunas consistiu na movimentação de um dos pontos vermelhos (Figura 6) e na observação da influência que isso teria no ponto *D*. No entanto, ao moverem o ponto, as alunas não tinham um plano definido, acabando por limitar esse movimento ao caso em que os pontos vermelhos não eram colineares.

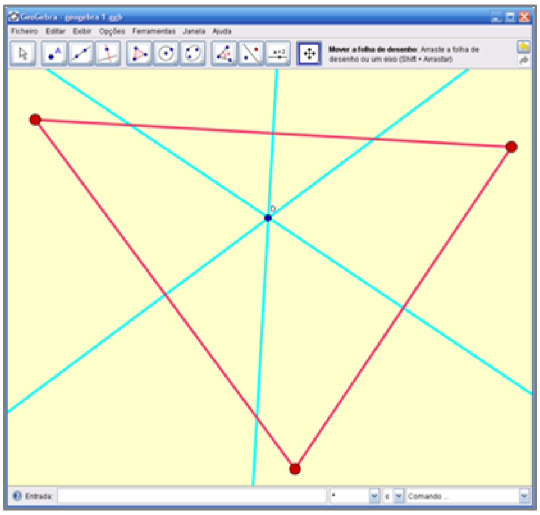


Figura 6 – Resolução da Alínea 1.2.da Ficha 12, feita por Clara e Madalena.

Desta forma, as alunas verificaram que as mediatrizes dos segmentos, assinalados a vermelho, se encontravam sempre num ponto, concluindo, por isso, que dadas três cidades existe sempre um local que lhes é equidistante. Mas, mesmo depois de darem a resposta apresentada anteriormente, a Madalena colocou-me a seguinte questão: "Como é que nós podemos dar uma resposta mais elaborada?", o que me levou a pensar que estas alunas poderiam começar a levantar dúvidas em relação à resposta apresentada, o que as poderia conduzir a uma reformulação da conjectura encontrada.

Contudo, não era isso que ocorria, pois a esta questão a Madalena acrescentou "É que nós movemos todos os pontos e depois isto dava sempre…", pelo que percebi que estas alunas estavam convictas em relação à conclusão obtida, mas não sabiam que tipo de justificação tinham de apresentar.

Portanto, o *software* utilizado teve um papel muito importante para estas alunas. Afinal, elas tentaram justificar a sua conjectura tendo por base apenas o que observaram, não utilizando os conceitos envolvidos, como o de mediatriz de um segmento de recta. Além disso, elas não conseguiram simular o caso em que os pontos que marcaram a vermelho eram colineares, o que me leva a crer que, quando moveram aleatoriamente os pontos, essa situação não surgiu. Ou seja, estas alunas não conseguiram que o seu raciocínio fosse além do que observaram.

Assim, este par de alunas mostrou compreender o que se pretendia com a tarefa, mas formulou uma conjectura incorrecta, tendo mostrado dificuldades na fundamentação da mesma. Pois, ambas as alunas se "prenderam" ao que observavam utilizando o programa, limitando a sua exploração àquilo que lhes era "visível".

Tarefa 2 – Ficha n.º 13

A Tarefa 2 da ficha n.º 13 foi realizada na aula de 22 de Março de 2010 e discutida na aula seguinte (25 de Março de 2010). Com esta tarefa pretendia-se que os alunos, trabalhando em grupos de quatro e utilizando material de desenho, determinassem o local onde se encontra a torre de vigia de incêndios da Serra de Reboredo. Ou seja, procurava-se que estes encontrassem a solução para um problema que envolvia a conjunção de três condições: "estar a 9 km de Peredo Castelhanos", "estar a 12 km de Adeganha" e "estar mais perto de Felgueiras do que de Cabeça Boa".

O trabalho na turma

Nesta tarefa, tal como nas anteriores, pretendia-se que os alunos interpretassem e resolvessem o problema. Para resolver o problema esperava-se que os alunos compreendessem como utilizar a escala dada e, posteriormente, construíssem duas circunferências, a de centro em Peredo Castelhanos e raio 9 quilómetros e a de centro em Adeganha e raio 12 quilómetros, encontrando a solução do problema através da determinação do ponto de intersecção das mesmas que estaria mais próximo de Felgueiras do que de Cabeça Boa.

Como se esperava, as circunferências referidas estão presentes nas resoluções dos alunos, sendo algo comum a todas elas. Logo, uma vez que, para construir estas circunferências, os alunos tinham de determinar os raios que lhes correspondiam no mapa, penso que todos compreenderam como utilizar a escala, pois todas as circunferências construídas tinham os raios adequados à mesma.

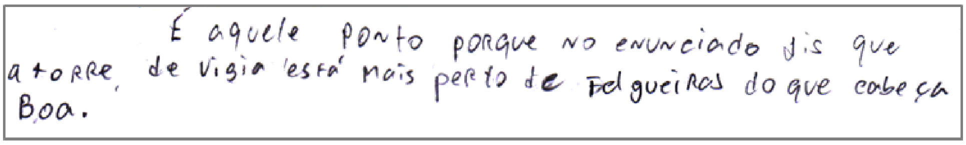
No entanto, apesar de todos os alunos terem sido capazes de utilizar a escala dada e representar correctamente os conjuntos de pontos associados a duas das condições do problema, sete não encontraram a solução correcta do mesmo. Destes alunos fazem parte aqueles que consideraram que a solução correspondia à intersecção das circunferências já referidas (dois pontos) e os que não assinalaram nenhum desses pontos. Sendo comum, em ambos os casos, a não apresentação de qualquer justificação para a resposta dada, apesar de esta ser expressamente pedida, o que torna difícil compreender, de forma específica, os aspectos que estiveram na origem das suas dificuldades, mas não me impede de procurar perceber alguns dos mesmos.

Assim, penso que os quatro alunos que consideraram que a solução correspondia à intersecção de duas circunferências, reconheceram que se tinham de verificar, simultaneamente, duas das condições do problema, ou seja, perceberam que estavam perante uma conjunção de condições. Contudo, embora a maioria destes alunos tenha construído a mediatriz do segmento com extremos nos pontos associados a Cabeça Boa e Felgueiras, não utilizou a terceira condição do problema ("estar mais perto de Felgueiras do que de Cabeça Boa"), uma vez que, além de não terem seleccionado apenas um dos pontos assinalados, estes alunos não representaram o conjunto associado a esta. Isto leva-me a pensar que estes alunos fizeram a construção referida após a discussão do problema, tendo-a acrescentado às suas resoluções porque esta se encontrava no quadro e não por terem percebido a utilização da mesma nesta tarefa.

Já os três alunos que não assinalaram nenhum ponto como solução, provavelmente, não compreenderam o problema, limitando-se a fazer as construções associadas às condições do mesmo (as circunferências e a mediatriz de segmento de recta mencionadas), sem avançar para a representação da solução deste. Desta forma, penso que estes alunos tiveram dificuldades em interpretar esta tarefa, pois, do enunciado apenas extraíram as condições da mesma, não percebendo que estavam perante uma conjunção.

Apesar disso, foram mais os alunos que conseguiram encontrar a solução correcta do que os que não o fizeram, tendo a maioria destes utilizado a mediatriz do segmento com extremos nos pontos correspondentes a Cabeça Boa e Felgueiras na sua resolução. Mas, não foi isso que se reflectiu na discussão do problema, pois, perante a resolução apresentada nesse momento (sem usar a mediatriz referida), foram poucos os alunos que sugeriram a realização desta construção. O que me leva a pensar que o facto de a maioria da turma ter construído a mediatriz do segmento referido, resultou da discussão efectuada e não do inicialmente realizado aquando da resolução da tarefa.

Nessa mesma discussão, surgiu a seguinte questão: "E se nós, no teste, puséssemos que era só esse ponto sem fazer a mediatriz, estava certo?", ao que eu respondi "Podiam não pensar na mediatriz, mas tinham de justificar". Mas, tendo em conta que são poucos os alunos que, recorrendo à construção da mediatriz do segmento de recta já mencionado, justificaram a sua resposta, e as justificações dos que não o fizeram surgem no sentido de explicar que o ponto verifica a terceira condição (Figura 7), creio que os alunos pensaram que teriam de justificar a resposta caso não utilizassem a mediatriz, quando eu pretendia que o fizessem independentemente da estratégia seguida.



É aquele ponto porque no enunciado dis que a torre de vigia está mais perto de Felgueiras do que cabeça Boa.

Figura 7 – Justificação apresentada por um dos alunos.

Além disso, como as resoluções apresentadas, dentro de um mesmo grupo, diferem, umas vezes quanto à solução, outras no que diz respeito à estratégia escolhida, penso que muitos dos alunos alteraram as suas resoluções em função da errada interpretação do que eu pretendia transmitir, não sendo estas reflexo da estratégia que adoptaram inicialmente (antes da discussão). Logo, não estou em condições de afirmar que, aquando da resolução da tarefa em grupo, os alunos optaram por uma estratégia de forma maioritária, conseguindo apenas perceber que surgiram duas estratégias distintas: a utilização da mediatriz de um segmento como forma de determinar os pontos mais perto de um dos extremos deste segmento do que do outro; e a constatação de que, dos dois pontos resultantes da conjunção das duas primeiras condições, apenas um respeitava a terceira condição.

Deste modo, na realização desta tarefa, todos os alunos conseguiram representar os conjuntos correspondentes a duas das condições da mesma, usando adequadamente o recurso disponível (material de desenho). No entanto, apesar das dificuldades que surgiram, em utilizar a terceira condição e encontrar a solução procurada, a maioria da turma foi bem sucedida, encontrando a solução correcta através de duas estratégias distintas.

A resolução de Clara e Madalena (em grupo com Ângela, Rui e Tiago)

Na realização desta tarefa, a Clara e a Madalena trabalharam em grupo com outros três colegas, a Ângela, o Rui e o Tiago, tendo, para isso, optado por uma estratégia que, segundo o Tiago, partiu dele e, após ser partilhada, foi adoptada por todos. Nesta estratégia e de acordo com o referido membro do grupo, após construírem duas circunferências, a de centro em Peredo Castelhanos e raio 9 km, e a de centro em Adeganha e raio 12 km, seleccionaram o local esperado "porque era onde estas duas circunferências se encontravam. E, apesar de se encontrarem [também] do lado esquerdo, a [intersecção] do lado direito, está mais perto de Felgueiras do que de Cabeça Boa”.

Aparentemente, o grupo aceitou esta estratégia porque percebeu que respeitava as condições enunciadas no problema e possibilitava encontrar a solução do mesmo. Contudo, não é isso que reflectem as resoluções apresentadas por estes alunos, visto que, à excepção da da Ângela, em todas surge a mediatriz do segmento de recta cujos extremos são os pontos associados a Cabeça Boa e Felgueiras.

Falando com o Tiago, questionando-o acerca da sua resolução, percebi que a mediatriz que se encontra na mesma foi feita somente após a discussão da tarefa, e não por sugestão de um dos outros elementos do grupo, o que me leva a pensar que poderá ter acontecido o mesmo com os elementos em que a referida mediatriz é apresentada. Mas, não é esta a única diferença entre o que é sugerido pelas resoluções deste grupo e a estratégia que, segundo o Tiago, foi seguida.

Na resolução do Rui, além das construções comuns aos seus colegas, encontram-se escritas as condições e os conjuntos que a elas estão associadas (Figura 8). No entanto, não é claro se tal fez parte da estratégia seguida pelo aluno – que pode ter começado por escrever as condições e os conjuntos, para, posteriormente os representar – ou se foi o modo que encontrou para procurar justificar a sua resposta.

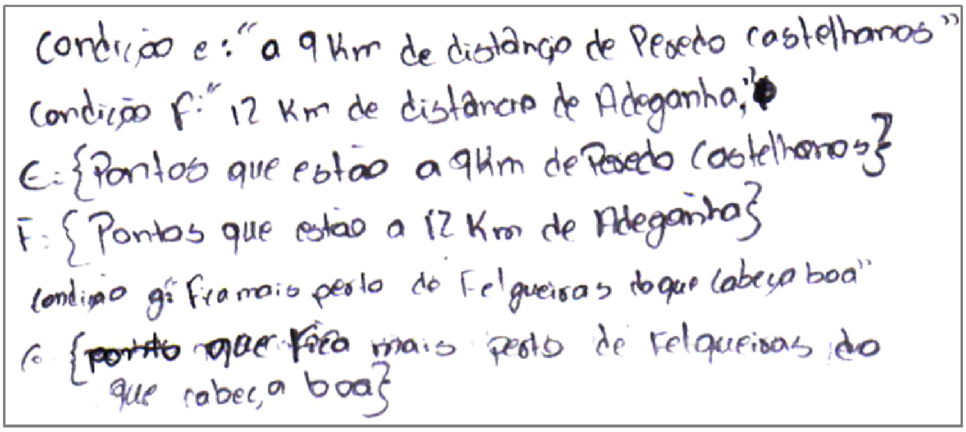

Condição e: "a 9 Km de distância de Pesedo castelhanos"
Condição f: " 12 Km de distância de Adeganha;"
E: {Pontos que estão a 9Km de Pesedo Castelhanos}
F: {Pontos que estão a 12 Km de Adeganha}
Condição g: "Fica mais perto de Felgueiras do que cabeça boa"
G {~~ponto que fica~~ mais perto de Felgueiras do que cabeça boa}

Figura 8 – Parte da resolução do Rui, da Tarefa 2.

Se se verificar a primeira hipótese, a estratégia seguida não deixa de ser semelhante à dos colegas, uma vez que, mesmo não escrevendo as condições, tiveram de identificá-las e representar os conjuntos que lhes estão associados. Se estivermos perante a segunda, o que foi escrito não justifica a totalidade do que é apresentado, visto que não é explicado o porquê da escolha do ponto, isto é, se estamos perante uma conjunção ou uma disjunção das condições dadas. Portanto, a estratégia deste aluno vai ao encontro do que foi feito pelo grupo, embora os restantes elementos não apresentem qualquer justificação para as respostas dadas.

Contudo, entre as resoluções desde grupo, há ainda uma diferença mais notória: a Madalena é a única que não apresenta a solução correcta para esta tarefa, marcando os dois pontos de intersecção das circunferências anteriormente referidas (Figura 9). Esta aluna parou a sua resolução antes de tomar a decisão sobre qual o ponto a escolher, ao contrário do que fez o resto do grupo. No entanto, não creio que o tenha feito por não compreender que a tarefa não estava terminada, mas sim por falta de tempo.

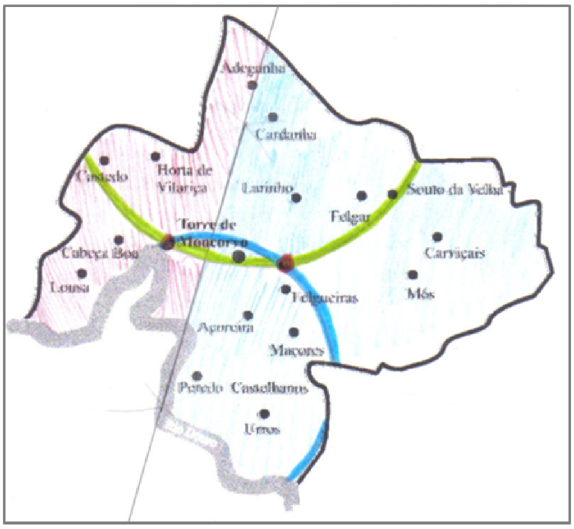


Figura 9 – Resolução da Tarefa 2, efectuada pela Madalena.

Durante a realização deste problema, o grupo estava um pouco disperso, havendo elementos que faziam a tarefa anterior (1.), enquanto outros procuravam a solução para esta (2.). Assim, quando o Tiago propôs uma estratégia para esta tarefa, a Madalena ainda se encontrava a resolver a anterior, tendo iniciado a Tarefa 2, momentos antes de se dar por terminado este momento da aula. Desta forma, a Madalena só retomou a tarefa aquando da correcção da mesma, não tendo corrigido o que fez na ficha porque, habitualmente, transcreve as correcções para o seu caderno.

A resolução desta aluna permite, também, evidenciar algo que, não tendo sido mencionado pelo Tiago, foi tido em conta pela maioria do grupo: a existência de uma quarta condição para o problema, que, apesar de tudo, não afectava a solução determinada pelas restantes três. No enunciado, um dos primeiros dados que surge é que a torre de vigia de incêndios fica no concelho de Torre de Moncorvo, pelo que o local procurado, além de respeitar as restantes condições do problema, tem de pertencer a este concelho. De facto, esta condição é respeitada por qualquer dos pontos que estão a 9 quilómetros de Peredo Castelhanos e a 12 quilómetros de Adeganha, mas poderia não ser, como ocorreu com outras das tarefas propostas em aula, em que dizer que determinado local só poderia estar, por exemplo, em Portugal, condicionava a solução do problema. Por isso, é interessante ver como esta aluna se apropriou desse conhecimento, não ignorando essa condição, como se pode ver pelo facto de ela ter colorido apenas o interior do concelho.

Assim, de modo geral, este grupo mostrou ter feito uma boa interpretação do problema, identificando uma quarta condição presente no mesmo, e tendo encontrado a solução adequada para este. No entanto, embora as diferenças existentes entre as resoluções dos seus elementos sugiram raciocínios interessantes, a falta de uma discussão acerca dos mesmos e a não apresentação de justificações por parte destes alunos não permite uma maior exploração destas.

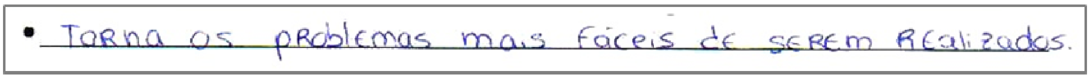
Questionário

Tendo em conta a terceira questão do presente estudo, na análise do questionário (disponibilizado no Anexo III) procurei identificar as potencialidades dos recursos utilizados que são reconhecidas pelos alunos, em particular para a selecção das estratégias a aplicar. Para tal, começo por analisar as respostas às Questões 2, 3, 7, e 8, comparando-as e, seguidamente, as respostas dos alunos à Questão 11.

Questões 2, 3, 7 e 8

Nas Questões 2, 3, 7 e 8 do questionário, os alunos indicaram os aspectos que consideraram ser positivos e negativos na utilização de material de desenho e do *GeoGebra*, na realização de tarefas relativas à unidade Lugares Geométricos. As respostas apresentadas mostram que, ao se referirem a um recurso, os alunos consideravam também o outro, isto é, empregaram expressões, como “é mais …”, que reflectem a comparação entre estes.

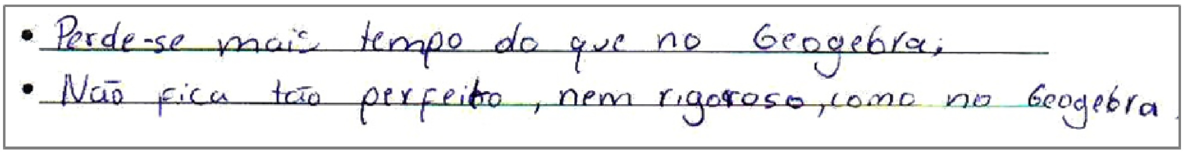
Referindo-se aos aspectos positivos do material de desenho, as respostas dos alunos foram bastante diversificadas. No entanto, surgiu com maior frequência, cerca de sete vezes, a ideia de que este instrumento é de fácil utilização, auxiliando a resolução das tarefas (Figura 10). Com menos frequência, surgem opiniões demonstrativas da comparação anteriormente referida, destacando-se as que referem que “Aprendemos como utilizar estes materiais quando não temos um programa que o faça” e que este recurso “Dá para fazer outras estratégias”.



• Torna os problemas mais fáceis de serem realizados.

Figura 10 – Um dos aspectos positivos do material de desenho, referido por um aluno.

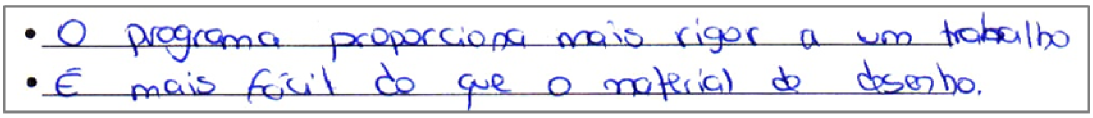
Já as respostas relativas aos aspectos negativos deste material não foram tão dispersas, centrando-se maioritariamente em três opiniões, sendo a mais referida pelos alunos, ocorrida nove vezes, a falta de rigor que a utilização deste recurso pode acarretar (Figura 11). Os outros aspectos mencionados pelos alunos dizem respeito à duração (“É mais demorado”) e ao esquecimento de trazer o material para as aulas, dado que não é utilizado em todas as disciplinas.



• Perde-se mais tempo do que no Geogebra;
• Não fica tão perfeito, nem rigoroso, como no Geogebra

Figura 11 – Uma das respostas relativas aos aspectos negativos do material de desenho.

Quanto aos aspectos positivos do *GeoGebra*, o que mais sobressai nas respostas dos alunos, sendo referido por vinte e um alunos, é o rigor que este possibilita (Figura 12). Além deste, há outros dois aspectos que são manifestados por muitos dos alunos e que se reflectem através das respostas: “É mais fácil” (repetida doze vezes) e “É mais divertido” (referida em oito respostas). Relativamente à rapidez de utilização deste recurso, surgiram, com menor frequência, opiniões mencionando que este “É mais rápido”.



• O programa proporciona mais rigor a um trabalho
• É mais fácil do que o material de desenho.

Figura 12 – Dois dos aspectos positivos do *GeoGebra*, referidos por um aluno.

No que diz respeito aos aspectos negativos da utilização deste *software*, surgiram essencialmente dois tipos de resposta, referindo-se, por um lado, que este “É um pouco complicado” (sete vezes) e, por outro, que “Não tem” (seis vezes) aspectos negativos que o caracterizam. Indo ao encontro do primeiro aspecto mencionado, foram apresentadas respostas referindo a não familiarização com o programa e a dificuldade em manter os “pontos no sítio” (Figura 13), isto é, em movimentar apenas o que se pretende ao utilizar a ferramenta “*Mover*”.

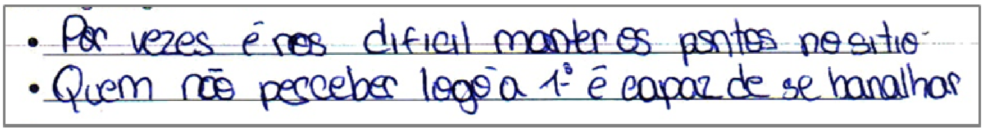

- Por vezes é nos dificil manter os pontos no sitio
- Quem não perceber logo à 1ª é capaz de se baralhar

Figura 13 – Alguns dos aspectos negativos da utilização do *GeoGebra*.

Assim, as respostas fornecidas permitem comparar os dois recursos no que diz respeito à dificuldade de utilização, à duração de execução, e ao rigor das construções efectuadas. No caso das dificuldades, as opiniões apresentadas pelos alunos dividem-se, pois, reconhece-se a facilidade do material de desenho, mas no que diz respeito ao *GeoGebra*, há os que o caracterizam como sendo o mais fácil, mas também os que assumem as dificuldades associadas à sua utilização. Quanto à duração de execução, o material de desenho é identificado como sendo mais demorado, em virtude da rapidez possibilitada pelo *GeoGebra*. E, finalmente, relativamente ao rigor, o *GeoGebra* é o eleito pela grande maioria dos alunos, dada a falta de rigor reconhecida nas construções efectuadas com material de desenho.

Questão 11

Na Questão 11 do questionário proposto, os alunos indicaram se o recurso de que dispunham para realizar um problema condicionou, ou não, as estratégias que seleccionaram, justificando as respostas dadas. Para tal, eram-lhes dados dois campos de resposta, correspondentes a *Sim* ou *Não*, e uma pergunta de natureza aberta, destinada à justificação da escolha.

As respostas dadas estão bastante divididas, sendo doze correspondentes a *Sim* e dezasseis a *Não*. Isto demonstra que, apesar de serem em maior número os alunos que sentiram que as suas estratégias não foram condicionadas pelos recursos disponibilizados, há também muitos alunos que reconhecem a influência dos mesmos na resolução de problemas.

Os alunos que responderam de forma afirmativa apresentam justificações baseadas nas vantagens e desvantagens que identificam nos recursos utilizados. Alguns, cerca de sete, dizem que, ao contrário do que ocorre com o material de desenho, o *GeoGebra* permite concretizar as suas estratégias (Figura 14), porque tem bastantes ferramentas e possibilita “realizar imensos problemas com o máximo rigor possível”. Já os restantes afirmam que o material de desenho permite pôr em prática um maior número de estratégias, sendo mais fácil “porque às vezes temos de estar muito atentos para descobrir as estratégias pelo *GeoGebra*”.

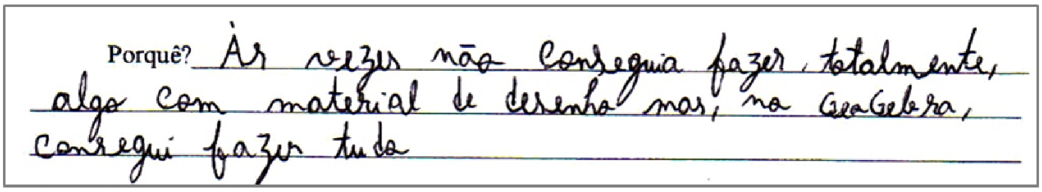

Porquê? Às vezes não conseguia fazer, totalmente, algo com material de desenho mas, na GeoGebra, consegui fazer tudo

Figura 14 **–** Justificação de um aluno que respondeu afirmativamente à Questão 11.

As justificações dos alunos que consideraram que os recursos não afectaram as suas estratégias, revelam que estes reconhecem que ambos “são bastante úteis”, não se sentindo condicionados ao utilizarem o *GeoGebra* (Figura 15). Além disso, pensam que as estratégias por eles seleccionadas seriam as mesmas, independentemente do recurso, não sendo estas afectadas pelos instrumentos utilizados.

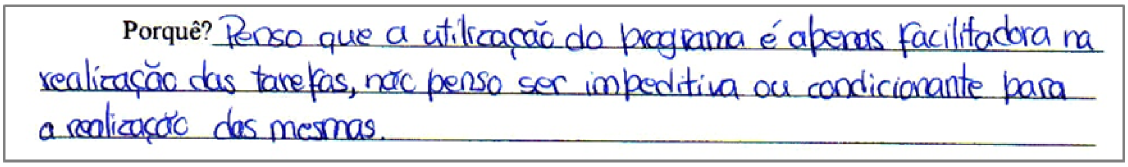

Porquê? Penso que a utilização do programa é apenas facilitadora na realização das tarefas, não penso ser impeditiva ou condicionante para a realização das mesmas.

Figura 15 **–** Justificação de um aluno que apresenta a resposta *Não* na Questão 11.

Assim, os alunos não apresentam uma opinião unânime relativamente à influência dos recursos em causa, na escolha das estratégias utilizadas na resolução de problemas. Há os que sentem que um destes recursos, o material de desenho ou o *GeoGebra*, se adapta melhor às suas estratégias e, também, os que não se sentem condicionados pelo recurso disponibilizado.

Teste Intermédio

Para fazer uma avaliação da prestação dos alunos na unidade Lugares Geométricos, na análise dos resultados da Questão 15 do Teste Intermédio de 27 de Abril de 2010 (que se encontra no Anexo IV), procurei identificar os aspectos que foram mais conseguidos pelos alunos e, também, aqueles que não o foram. Para tal, baseie-me nos pontos obtidos pelos alunos nesta questão (Quadro 4) e nos critérios de classificação relativos à mesma (Anexo IV).

Pontos Obtidos	**Número de alunos**
7	10
6	10
4	3
3	1
0	4

Quadro 4 – Pontos obtidos na Questão 15 do Teste Intermédio.

Para realizar a referida questão era necessário construir dois lugares geométricos, uma circunferência (ou arco de circunferência) e a mediatriz de um segmento de recta, determinando, posteriormente o ponto de intersecção dos mesmos que estaria no interior do mapa. Apenas o cumprimento de todos estes aspectos conduziria à cotação máxima (7 pontos) obtida por 10 alunos, ou seja, por mais de um terço da turma.

Um grande número de alunos conseguiu a cotação de 6 pontos o que, de acordo com os critérios, pode ter sido conseguido de, pelo menos, duas formas. Estes alunos podem ter reconhecido que estavam perante a intersecção dos referidos lugares geométricos, não tendo desenhado um deles com rigor. Mas, também, podem ter assinalado os dois pontos de intersecção desses mesmos lugares geométricos. Se for este o caso, os alunos mostram que não tiveram em consideração uma das condições do problema, seleccionando uma solução inadequada. Contudo, em qualquer dos casos, é claro que os alunos identificaram os lugares geométricos a construir e, também, que estavam perante uma conjunção de condições.

Os alunos que obtiveram cotação de 3 ou 4 pontos construíram, apenas, um dos lugares geométricos envolvidos na tarefa. Ou seja, não tiveram em conta todas as condições do enunciado. Já os que tiveram cotação nula apresentam respostas bastante distintas da pretendida.

Considerando que a maior parte da turma teve cotação igual ou superior a 6 pontos, cerca de 71 % dos alunos (Anexo IV, Quadro 5) posso dizer que, em situação de avaliação, os alunos conseguem, na sua maioria, identificar as condições presentes em tarefas relativas à unidade leccionada, reconhecendo, não só, os lugares geométricos a elas associados, mas também as conjunções pedidas. Contudo, há alguns alunos que não o conseguem fazer, representando as condições mencionadas apenas de forma parcialmente correcta, ou sem qualquer correcção.

Reflexão final

No presente trabalho procuro dar resposta às três questões que se apresentam no capítulo introdutório, tendo em conta os dados analisados e a literatura consultada. Assim, centrando-me na resolução de problemas contextualizados na realidade, procurei perceber como os alunos mobilizaram os conceitos e propriedades envolvidos na unidade, quais as principais dificuldades que apresentam e quais as potencialidades dos recursos utilizados.

Mobilização de conceitos e propriedades matemáticos

No que diz respeito à mobilização dos conceitos abordados na unidade Lugares Geométricos na resolução de problemas contextualizados na realidade, foco-me em, apenas, duas das três tarefas analisadas[3] e nos resultados do Teste Intermédio.

A primeira alínea da Tarefa 1 da ficha n.º 12 envolvia a construção das mediatrizes de diversos segmentos de recta que foi elaborada pela grande maioria dos alunos, o que demonstra o reconhecimento deste mesmo conceito. Mas, imediatamente antes da concretização deste problema, foi discutida uma tarefa envolvendo o referido conceito numa situação semelhante, o que poderá ter sugestionado os alunos, conduzindo-os à utilização do mesmo. Afinal, no enunciado desta alínea, a condição que caracteriza a mediatriz de um segmento não é evidenciada, o que me leva a crer que, perante condições menos familiares, os alunos poderão ter recorrido aos conceitos que tinham mais presentes, o que, neste caso, corresponderia à utilização do conceito adequado. No entanto, mesmo que sugestionados, os alunos conseguiram perceber como recorrer a este conceito para encontrar a solução correcta desta tarefa, ilustrando que se apropriaram das características que o definem.

Já a análise da Tarefa 2 da ficha n.º 13 torna mais clara a mobilização de dois dos conceitos abordados na referida unidade: circunferência e intersecção de lugares geométricos/conjunção de condições. Pois, contrariamente ao que ocorreu com a anterior, a realização desta tarefa não foi precedida de outras que pudessem sugestionar a resolução da mesma. A circunferência surgia nesta tarefa através de duas condições que

[3] Uma das tarefas analisadas, a Tarefa 1 da ficha n.º 9, foi a primeira que propus, não tendo sido trabalhados quaisquer conceitos matemáticos relativos à unidade Lugares Geométricos antes da realização da mesma.

foram correctamente identificadas e representadas por todos os alunos. Enquanto a intersecção de lugares geométricos surgia subtilmente, através da utilização única da conjunção “e”. Porém, tal não impediu que a maioria dos alunos reconhecesse que aquela conjunção de condições corresponderia à intersecção de diversos lugares geométricos, e a assinalassem adequadamente.

Na Questão 15 do Teste Intermédio os conceitos envolvidos eram os três referidos anteriormente: mediatriz de um segmento de recta, circunferência e intersecção de lugares geométricos/conjunção de condições. Estes foram correctamente identificados pela maioria da turma, tendo sido cerca de 20 os alunos que apresentaram uma cotação correspondente à identificação de todos estes conceitos, embora alguns deles o possam ter feito não respeitando uma das condições do problema em questão.

Assim, as tarefas analisadas e os resultados do teste aqui considerado permitem-me concluir que, na unidade leccionada, perante um problema com um contexto próximo do real, os alunos conseguem identificar, representar e utilizar alguns dos conceitos e conteúdos envolvidos. Isto é, a minha análise permite-me compreender que as noções de mediatriz de um segmento de recta, circunferência e intersecção de lugares geométricos/conjunção de condições são reconhecidas e utilizadas de forma adequada pelos alunos num grande número de situações. Contudo, tal como demonstram os resultados do Teste Intermédio, nem sempre esta mobilização de conceitos leva os alunos a interpretar e analisar as suas soluções à luz das situações propostas.

Dificuldades na resolução de problemas

Nos diversos problemas propostos na unidade Lugares Geométricos, foram várias as dificuldades manifestadas pelos alunos, que se prendem às diferentes fases da resolução de problemas identificadas por Polya (2003). Como se pode verificar através das tarefas analisadas, grande parte das dificuldades reveladas pelos alunos diz respeito à *compreensão do problema*, etapa que condiciona o restante processo de resolução do mesmo.

Na Tarefa 1 da ficha n.º 9, verifiquei que, tal como esperado, uma das dificuldades dos alunos foi reconhecer que se pretendiam encontrar todas as soluções possíveis e não apenas uma, conduzindo-os a respostas muito incompletas. Afinal, esta foi a primeira tarefa proposta no âmbito da unidade leccionada, pelo que os alunos ainda não estavam familiarizados com situações em que as soluções esperadas eram construções geométricas. Assim, tal como constataram a Clara e a Madalena, a tarefa foi "fácil", pois não tendo captado a essência do enunciado, os alunos não sentiram o desafio proposto na sua totalidade. Terá, então, esta tarefa sido adequada? Foi este o melhor momento para a propor?

Este problema, potencialmente, levaria alguns alunos a uma solução errada, que seria o ponto de partida da discussão decorrente da mesma. Contudo, apenas um par de alunos encontrou a solução correcta, e não era esse o meu objectivo. Por isso, penso que esta tarefa não foi adequada ao momento em que surgiu, uma vez que, ao introduzir a nova unidade, deveria ter procurado estabelecer uma ligação entre esta e os conhecimentos prévios dos alunos, "desbravando caminho" para as novas aprendizagens.

Apesar disso, a resolução desta tarefa não deixa de ilustrar as dificuldades tidas pelos alunos na *compreensão do problema*, revelando que muitos destes não tiveram em consideração toda a informação contida no enunciado para procurarem a solução adequada à tarefa.

Já nos restantes problemas analisados, estas dificuldades não abrangeram tantos alunos, mostrando a progressão na superação das mesmas ao longo do trabalho na unidade. Mas, os alunos que as tiveram mostraram que, tal como ocorreu na Tarefa 1 da ficha n.º 9, não identificaram todos os dados, condições ou o que se pretendia determinar, encontrando soluções incorrectas para estes problemas.

A fase seguinte à *compreensão do problema*, correspondente ao *estabelecimento de um plano*, é, de acordo com Polya (2003), a etapa principal e mais complexa da resolução de um problema, sendo expectável que nela surgissem dificuldades. No entanto, na análise efectuada estas não foram identificadas. Quererá isso dizer que não ocorreram?

A análise do que aconteceu, de forma geral, com a turma, baseou-se em documentos escritos, em que, dada a falta de justificações apresentadas, apenas se observa o que resultou da prática do plano seleccionado. Então, como identificar os processos efectuados pelos alunos nesta etapa?

Os momentos de discussão em grande grupo poderiam ser bastante importantes no esclarecimento deste aspecto. Mas, ao longo da minha intervenção, tive a oportunidade de verificar que, muitos dos alunos que optam por estratégias diferentes das apresentadas, nestes momentos, não as partilham, impedindo que se explorem os planos por eles estabelecidos. Portanto, as impressões que adquiri sobre esta fase da resolução de problemas resultam do que foi apresentado nas discussões e das gravações dos diálogos do par Clara e Madalena, podendo não ser representativas do ocorrido com a maioria da turma.

Os dados por mim recolhidos revelam que o *estabelecimento de um plano* não constituiu um obstáculo para os alunos, apesar de algumas das dificuldades atribuídas à compreensão do problema poderem ter ocorrido nesta etapa. De facto, as resoluções analisadas reflectiam as estratégias utilizadas, e estas podem ter resultado de qualquer uma das fases anteriores à aplicação das mesmas.

A *execução do plano* torna-se, assim, na etapa mais visível através dos dados analisados. O que não é sinónimo de que as dificuldades desta fase sejam evidenciadas pelas resoluções dos alunos, dado que, para as reconhecer seria necessário identificar as estratégias seleccionadas no *estabelecimento de um plano* e, tal como já foi referido, isso nem sempre foi possível. Cinjo-me, assim, à única situação em que, reconhecido o plano, houve lapsos na sua execução: a resolução da primeira alínea da Tarefa 1 da ficha n.º 12, elaborada pelo par Clara e Madalena.

Nesta alínea, aparentemente, as alunas aplicaram o plano correctamente, mas, numa análise mais atenta, percebi que não foi utilizada a ferramenta do *GeoGebra* que permitiria que, de facto, assim fosse. Logo, nesta situação, o *GeoGebra* tornou-se num obstáculo à *execução do plano*, uma vez que um dos seus passos foi aplicado ignorando a diferença existente entre este recurso e o material de desenho. Isto é, as alunas determinaram o ponto de intersecção de três construções, assinalando o ponto comum a estas (como se procede com material de desenho), em vez de utilizar a ferramenta que o determinaria.

Assim, as dificuldades que encontrei na *execução do plano* estão relacionadas com a familiarização com o recurso a utilizar, e não com o desconhecimento do modo de aplicação do mesmo. Afinal, as alunas sabiam como executar o plano, e até encontraram a solução do problema, mas desconheciam a existência de uma ferramenta mais adequada à aplicação deste.

Após todas estas etapas, deveria surgir a *verificação* da resolução do problema. Contudo, ao longo da unidade leccionada, esta foi a etapa menos conseguida, dado que são muitas as situações em que esta não foi realizada, incluindo a resolução de algumas das três tarefas analisadas.

Na Tarefa 1 da ficha n.º 9, foi notório que a grande maioria da turma, após determinar uma solução ao problema, não continuou a resolução do mesmo, ou seja, não reviu os processos que conduziram à solução encontrada. Estes alunos ficaram satisfeitos por encontrar uma solução, não procurando averiguar a correcção da mesma ou a existência de outras.

Com a realização da Tarefa 2 da ficha n.º 13 esta situação não foi tão evidente, até porque, esta tarefa tinha uma única solução. No entanto, tal como na tarefa referida anteriormente, senti que as dificuldades dos alunos poderiam ter sido superadas se tivessem efectuado a *verificação* da sua resolução, pois com ela poderiam ter reinterpretado o problema, evitando as consequências de uma errada compreensão do mesmo.

Já na Alínea 1.1 da Tarefa 1 da ficha n.º 12 ocorreu uma situação que poderá corresponder ao contrário: um par de alunos optou por uma estratégia que evidenciou o pedido no enunciado. Tal leva-me a crer que, cumprindo as etapas sugeridas por Polya (2003), estes alunos encontraram uma solução e, posteriormente reviram o efectuado, procurando verificar as condições enunciadas.

Contudo, esta foi a única situação em que constatei que esta situação poderia estar a acontecer, o que me leva a pensar que, dadas as potencialidades da concretização da *verificação*, esta deveria ter sido salientada ao longo da minha intervenção. De facto, ao cumprirem esta etapa os alunos poderiam identificar os seus erros e corrigi-los, superando as dificuldades encontradas.

Assim, penso que, perante um problema, a origem da maioria das dificuldades dos alunos é a sua compreensão, mas também, que tal ocorre porque não são respeitadas as quatro etapas atribuídas a Polya (2003). Isto é, a última etapa, aquela que poderia evitar algumas das falhas apresentadas, raramente é concretizada pelos alunos. Por isso, na minha futura prática lectiva, uma das preocupações que estará presente, será incutir nos alunos, não só, a necessidade de efectuar uma boa interpretação dum problema, como também, a importância da *verificação* da resolução do mesmo.

Potencialidades dos recursos utilizados

Ao longo da unidade leccionada, os alunos utilizaram dois recursos distintos, que contribuem de forma diferente para a resolução de problemas. Um desses recursos, o material de desenho, foi utilizado em duas das tarefas analisadas, enquanto o *GeoGebra* foi usando em apenas uma.

Nas tarefas em que se recorreu a material de desenho (Tarefa 1 da ficha n.º 9 e Tarefa 2 da ficha n.º 13), não foram observadas dificuldades relacionadas com o recurso, até porque, sendo um material utilizado noutras disciplinas, os alunos estavam familiarizados com o mesmo. Já em relação às estratégias adoptadas pelos alunos, não houve nenhuma que se destacasse e reflectisse a exploração das potencialidades deste recurso.

Apesar disso, uma das mais-valias deste recurso, identificados pelos alunos no questionário que lhes foi proposto, foi o facto de possibilitar outras estratégias. Mas a que estratégias se referem os alunos?

Dado que o número de respostas referindo este facto é muito reduzido, não creio que os alunos, de forma geral, tenham reconhecido as diferentes possibilidades trazidas por estes recursos para a realização de construções geométricas. Afinal, nas tarefas propostas, o recurso disponibilizado foi seleccionado em função do que se pretendia concretizar nestas, permitindo sempre a resolução completa das mesmas.

Na tarefa em que foi utilizado o *GeoGebra* (Tarefa 1 da ficha n.º 12), a alínea que mais reflecte as potencialidades do mesmo é a 1.2., que, apesar de ter um carácter mais exploratório, corresponde a uma extensão de um problema. Pois, nela pretendia-se que os alunos recorressem à principal característica do *GeoGebra*: o arrastamento de pontos.

Usufruindo desta característica, todos os pares de alunos conseguiram formular uma conjectura, embora, nem todos alcançassem a correcta. Um destes pares foi o constituído pelas alunas Clara e Madalena, que limitaram a sua exploração ao caso em que os três pontos envolvidos na tarefa eram não colineares. As referidas alunas moveram estes pontos sem um plano definido, ou seja, utilizaram o *arrastamento aleatório* referido em Arzarello *et al*. (2002). Com este movimento, exploravam as suas construções simulando, somente, a situação anteriormente mencionada, cingindo-se ao observável, o que as impossibilitou de chegar à conclusão correcta, como reconhecido no estudo de Junqueira (1994).

Um outro par, contrariamente a este, formulou a conjectura correcta, medindo um dos ângulos do triângulo definido por esses pontos, o que mostra, que a dado momento da sua exploração, este par formulou um plano (fazer variar o ângulo medido) e utilizou o *arrastamento guiado* referido em Arzarello *et al*. (2002) para o colocar em prática.

As diferentes estratégias adoptadas por estes dois pares ilustram que a não formulação de um plano pode tornar os alunos dependentes do que observam, fazendo da sua conjectura um resultado do acaso, isto é, o arrastamento efectuado, sendo aleatório, pode ou não tornar evidentes as propriedades que caracterizam a conjectura procurada.

Mas, também mostram que, tendo por base um plano, o arrastamento de pontos traz dinamismo às explorações e potencializa a formulação de conjecturas correctas.

O arrastamento de pontos foi, também, identificado pelos alunos no questionário a que responderam, sendo referido como um dos aspectos que dificultou a utilização do *GeoGebra*. Não estando os alunos familiarizados com este recurso, observar construções em movimento não é algo habitual para eles, uma vez que, como foi reconhecido pelos autores anteriormente referidos, tal não é possível em suporte de papel.

Assim, a utilização de *software* de Geometria dinâmica nas aulas de Matemática, tem as suas vantagens, mas, para tal, é necessário que os alunos compreendam como tirar partido delas, como é referido em Piteira & Matos (2002). Neste aspecto, o papel do professor é fundamental, uma vez que, não basta que os alunos saibam que é possível mover os pontos, como a Clara e a Madalena, eles precisam de saber como o devem fazer e aprender a formular planos com esse intuito. Não tendo sido este aspecto focado quando leccionei a unidade Lugares Geométricos, pretendo tê-lo em atenção na minha futura prática lectiva, visto que, pode estabelecer a diferença entre tirar partido do potencial do recurso ou, simplesmente, utilizá-lo.

Comparando os dois recursos mencionados, através da análise do questionário, é reconhecido que, tal como referido por Keyton (1997) e Oliveira & Domingos (2008), o *software* de Geometria dinâmica torna mais rápida a formulação de conjecturas. Mas, também, que este mesmo programa torna mais rigorosas as construções efectuadas.

Referindo-se à forma como os recursos condicionam as estratégias adoptadas, é interessante ver as diferentes opiniões dos alunos. É notório que, quando nas resoluções analisadas, o recurso utilizado era o *GeoGebra*, as estratégias eram mais diversificadas, usufruindo das suas potencialidades, enquanto no caso do material de desenho, tal não foi evidenciado. No entanto, isso não é reconhecido pelos alunos nas respostas dadas no questionário. Será que, recorrendo a material de desenho, foram utilizadas estratégias que não se reflectem nas suas resoluções?

Os alunos podem ter usado a régua para fazer medições, sem nunca o representar, ocultando parte das estratégias utilizadas. De facto, embora quisesse que os alunos justificassem as suas respostas e expusessem as suas estratégias, nunca insisti em tal aspecto, impedindo o transparecer do raciocínio dos alunos e, em consequência disso, a compreensão das opiniões por eles manifestadas.

Esta divergência de opiniões na Questão 11 do questionário, vai ao encontro do verificado quando comparando as Questões 2, 3, 7 e 8 do mesmo. Pois, nestas, os alunos não se revelaram unânimes quanto à facilidade de utilização dos recursos, respondendo na 11, que se sentiram condicionados pelo recurso devido à facilidade do mesmo, referindo-se uns ao material de desenho e outros ao *GeoGebra*.

Assim, penso que os recursos utilizados podem afectar as estratégias dos alunos, dando o *GeoGebra* origem a estratégias diferentes e originais. Mas, apesar de haver situações em que a utilização dos dois recursos é muito semelhante, não condicionando as estratégias a adoptar, é importante procurar que os alunos as justifiquem e apresentem, para compreender como utilizar estes recursos, em função das características dos alunos.

A concluir

Após leccionada a unidade Lugares Geométricos e analisados os dados recolhidos em procura das respostas às questões apresentadas na introdução deste relatório, tomei consciência de diversos aspectos. Destes fazem parte, não só, aqueles que dizem respeito às referidas questões, mas, também, os que podem vir a constituir um contributo para a minha futura prática lectiva.

Analisados os dados, compreendi que a mobilização de conceitos relativos à referida unidade, na resolução de problemas, não constitui o principal obstáculo da maior parte dos alunos. Contudo, as poucas dificuldades apresentadas, perante tarefas desta natureza, podem estar relacionadas com este aspecto, uma vez que, a representação incorrecta de condições enunciadas pode corresponder à não identificação dos conceitos que lhe correspondem. Apesar disso, o balanço sobre a aprendizagem dos conteúdos relativos à unidade é positivo dado que em situação de avaliação (Teste Intermédio) a classificação média dos alunos numa questão relativa à unidade foi de 74 % (Anexo IV, Quadro 5).

Relativamente aos recursos utilizados, percebi que estes podem trazer algumas dificuldades aos alunos e condicionar as suas estratégias, mas, maioritariamente, de forma positiva. De facto, a familiarização com os instrumentos é necessária e não é feita de igual modo com todos os alunos. Como é que, enquanto professores, a devemos proporcionar? Será que há tarefas que, simultaneamente, se adequam aos conteúdos a abordar e à exploração destes recursos?

Penso que é possível propor tarefas com estas características, mas, para tal, e no caso particular do *software* de Geometria dinâmica, estas devem surgir quando os conteúdos a abordar não necessitam de tantos conhecimentos acerca dos programas. Ou seja, considero que a familiarização com este recurso pode ser mais bem sucedida se ocorrer progressivamente, a partir de níveis de escolaridade mais elementares, e não, repentinamente, como aconteceu neste caso.

A problemática desenvolvida centra-se na resolução de problemas contextualizados na realidade, pelo que, procurei que as tarefas propostas ao longo da minha intervenção fossem desta natureza. Será que foram? É realista planificar as férias sobre um mapa? Ou utilizar plantas de edifícios para colocar um *router* ou, simplesmente, aspirar um quarto?

Não sendo totalmente realistas, no sentido da sua aplicação no dia-a-dia, estas situações possibilitam, contudo, uma aproximação à realidade, permitindo que os alunos contactem com aspectos que lhes são familiares, apelando aos seus conhecimentos para lá da Matemática. Afinal, no seu dia-a-dia, é pouco provável que alunos utilizem um compasso ou uma régua para resolverem problemas que envolvam lugares geométricos. Ainda assim, devem ser capazes de reconhecer que os conceitos subjacentes a estas práticas se integram no mundo que os rodeia e que não são algo distinto e à parte da realidade.

Alguns dos problemas propostos tinham um contexto mais realista que os outros, porque foi difícil conseguir que, de facto, todos eles correspondessem a situações reais, situando-se, na sua maioria, num contexto semi-real (Skovsmose, 2008). Apesar disso, como anteriormente referido, estes problemas podem contribuir para que os alunos ampliem a visão que têm da Matemática.

Para além desse aspecto, na base de todos eles existia uma outra intenção: a de potencializar o desenvolvimento do sentido crítico dos alunos (Pierce & Stacey, 2009). Perante algo que lhes é familiar, como aspirar um quarto, procurava que os alunos não se limitassem a reconhecer os conteúdos matemáticos envolvidos na situação apresentada. Pretendia que estes os adaptassem ao contexto, isto é, que identificassem as condições que, embora não estando escritas no enunciado, fazem parte do problema. No caso exemplificado, não era dito que o fio do aspirador não atravessa paredes, e, embora os alunos saibam que tal é impossível, esta situação teve de ser discutida, porque ainda nem todos desenvolveram esse espírito crítico quando resolvem problemas em matemática.

Estes contextos, a meu ver, tiveram o seu papel na aula de matemática, pois permitiram que, nas discussões das soluções das tarefas, “todos falássemos a mesma língua” e debatêssemos situações que, igualmente, conhecemos. Procurava que, desta forma, os alunos compreendessem como os conteúdos abordados se adequam ao “seu mundo”, dando-lhes sentido.

Os planos das aulas leccionadas na unidade Lugares Geométricos foram elaborados considerando, também, esse objectivo, mas, como se pode verificar através na secção "Síntese das aulas", na sua maioria, estes planos não foram cumpridos. Em muitas das aulas, as primeiras etapas planeadas duraram bastante mais tempo que o previsto, impedindo a realização das que lhes sucediam. Terei eu feito uma má gestão do tempo? Ou fui ambiciosa de mais?

Penso que o incumprimento dos planos resulta da combinação destes dois aspectos. A primeira aula da referida unidade foi aquela que mais evidenciou as falhas na gestão do tempo, pois foram realizadas todas as etapas previstas, mas os momentos de discussão tiveram uma duração reduzida, não permitindo a concretização de todos os objectivos de aula. Considerando tal facto, nas aulas seguintes procurei evitar que esta situação se repetisse, tentando que os momentos em grande grupo se adequassem aos objectivos a que estavam destinados. Em virtude disso, as discussões acabaram por ser mais longas e dei oportunidade a que a grande maioria dos alunos concluísse as suas resoluções das tarefas (para poderem participar nas discussões decorrentes das mesmas). Enfim, prolonguei determinados momentos da aula, impedindo a concretização de outros, ou seja, fui ambiciosa de mais.

Através das diferenças detectadas entre os planos de aula e a sua concretização, percebi que uma boa aula não se determina pelo número de tarefas a realizar, mas sim, pela procura de atingir "em pleno" determinados objectivos. De que vale propor um grande número de tarefas, se os alunos não compreenderam sequer a primeira? A meu ver, não vale de nada. As aulas não são uma corrida em busca da realização de tarefas, são apenas um meio de procurar promover a aprendizagem dos alunos, tendo em conta determinados objectivos.

Assim, este trabalho permitiu-me reflectir sobre a minha prática lectiva considerando diversas perspectivas. Isto é, possibilitou-me compreender melhor os processos dos alunos na resolução de problemas, mas, também, vários aspectos que devo melhorar e considerar futuramente, com vista a promover as aprendizagens dos alunos.

Referências Bibliográficas

- Abrantes, P. (1999). Investigações em geometria na sala de aula. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 153-167). Lisboa: Projecto MPT e APM.

- Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na educação básica*. Lisboa: ME-DEB.

- Arzarello, T., Olivero, F., Paola, G., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik*, *34*(3) (pp. 66-72).

- Bodgan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

- Candeias, N. (2005). *Aprendizagem em ambientes de geometria dinâmica (8.º ano)* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task* (1.ª ed.). Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

- Gomes, A. S., & Vergnaud, G. (2004, Março). On the learning of geometric concepts using dynamic geometry Software. *RENOTE: Novas Tecnologias na Educação*, *2*(1). Recuperado de http://www.cinted.ufrgs.br/renote/mar2004/artigos/40-alexGomes.pdf a 20 de Fevereiro de 2010.

- Jiang, Z. (in press). Explorations and reasoning in the dynamic geometry environment. *In the Proceedings of the Thirteenth Asian Conference on Computers in Education*. Recuperado de http://atcm.mathandtech.org/EP2008/papers_full/2412008_15336.pdf a 19 de Janeiro de 2010.

- Junqueira, M. (1994). *Aprendizagens da geometria em ambientes computacionais dinâmicos: Um estudo no 9.º ano de escolaridade*. (Tese de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa).

- Keyton, M. (1997). Students discovering geometry using dynamic geometry software. In J. King & D. Schattschneider (Eds.) *Geometry turned on! Dynamic software in learning, teaching, and research* (pp. 63-68). Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.

- Ministério da Educação. (1991a). *Organização curricular e programas: Ensino Básico - 3.º ciclo* (vol. I). Lisboa: Direcção Geral do Ensino Básico e Secundário.

- Ministério da Educação. (1991b). *Programa de Matemática: Plano de organização do ensino-aprendizagem: 3º ciclo do ensino básico*. (vol. II). Lisboa: Imprensa Nacional Casa da Moeda.

- Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

- NCTM. (2008). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (Trad.). Lisboa: APM. (Obra original publicada em 2000).

- Olive, J. (2002). Implications of Using Dynamic Geometry Technology for Teaching and Learning. In M. Saraiva, M. Coelho & J. Matos (Org.). *Ensino e aprendizagem da geometria* (pp. 7-33). Covilhã: SPCE - Secção de Educação Matemática.

- Oliveira, H. & Domingos, A. (2008). Software no ensino e aprendizagem da Matemática: Algumas ideias para discussão. In A. P. Canavarro, D. Moreira & I. Rocha (Orgs.), *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 279-285). Lisboa: SEM-SPCE.

- Pierce, R. & Stacey, K. (2009). *Using dynamic geometry to bring the real world into the classroom*. Recuperado de http://128.250.151.11/sme/research/Pierce_Stacey_GGB.pdf a 19 de Janeiro de 2010.

- Pires, M. (2001). *A diversificação de tarefas em Matemática no ensino secundário: Um projecto de investigação-acção* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

- Piteira, G. & Matos, J. (2002). Ambientes Dinâmicos de Geometria como Artefactos Mediadores para a Aprendizagem da Geometria. In M. Saraiva, M. Coelho & J. Matos

(Org.). *Ensino e aprendizagem da geometria* (pp. 61-72). Covilhã: SPCE - Secção de Educação Matemática.

- Polya, G. (2003). *Como resolver problemas* (Trad.). Lisboa: Gradiva (Obra original publicada em 1945).

- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In Grupo de Trabalho de Investigação (Ed.). *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: Associação de Professores de Matemática. (Ficheiro pdf) Recuperado de http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/05-Ponte_GTI-tarefas-gestao.pdf a 18 de Janeiro de 2010.

- Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. & Oliveira, P. A. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação - DGIDC.

- Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas?. In P. Abrantes, L. Leal & J. Ponte (Eds.). *Investigar para aprender Matemática* (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT.

- Skovsmose, O. (2008). Cenários para investigação. In O. Skovsmose (Ed.). *Desafios da reflexão em educação matemática crítica* (pp. 15-40). (Trad.). São Paulo: Papirus.

- Veloso, E. (1998). *Geometria. Temas actuais: Materiais para professores* (1.ª ed.). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional (IIE).

Bibliografia:

- Iolanda & Correia, Olga. (2009). *Matemática em acção – 8.º ano/ 3.º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Lisboa Editora.

- Neves, M. & Faria, M. (1999). *Exercícios de matemática – 2ª parte – matemática 8.º ano*. Porto: Porto Editora.

- Amorim, D. (2000). *Compêndio de Geometria* (vol. I). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática. (Fac-simile da edição da Coimbra Editora, 1943).

- Palma, A. (1956). *Elementos de Geometria para os 3., 4., 5. anos dos liceus*. Lisboa: Livraria didáctica.

Sítios consultados:

- Cabrilog. Innovative Maths Tools. Acedido a 6 de Fevereiro de 2010.
  - http://www.cabri.com/cabri-3d.html

- *GeoGebra*. Acedido a 10 de Janeiro de 2010.
  - http://www.geogebra.org/cms/pt_PT

- Ministério da Educação, Gabinete de Avaliação Educacional. (30 de Abril de 2008). Teste Intermédio de Matemática. Acedido a 20 de Janeiro de 2010.
  - http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=9&fileName=M3Ceb8_ec_vv.pdf

- Ministério da Educação, Gabinete de Avaliação Educacional. (27 de Abril de 2010). Teste Intermédio de Matemática. Acedido a 1 de Maio de 2010.
  - http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=9&fileName=MAT_8_ENV1_Abril_2010.pdf
  - http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=9&fileName=MAT_8_CCV1_Abril_2010.pdf

- NCTM. Illuminations – Resources for Teaching Math. Acedido a 20 de Janeiro de 2010.
  - http://illuminations.nctm.org/LessonDetail.aspx?id=L661
  - http://illuminations.nctm.org/LessonDetail.aspx?id=L745

Anexos

Anexo I - Planos de aula

1.ª Aula (8 de Março de 2010)

Tema: Lugar geométrico. Circunferência, círculo.

Sumário

Introdução ao tema Lugares Geométricos.

Resolução de uma ficha de trabalho. Apresentação e discussão dos resultados.

Conteúdos / Conceitos:	**Pré-requisitos:**
• Lugar geométrico.	• Circunferência; • Círculo; • Teorema de Pitágoras.

Objectivos:

- Identificar o conjunto dos pontos do plano que estão a uma distância menor, maior ou igual a *d* de um ponto dado.
- Construir círculo e circunferência.
- Resolver geometricamente problemas.
- Fazer um esboço que facilite a compreensão e resolução de um problema.
- Descrever e justificar, oralmente e por escrito, o processo e estratégias usados na resolução de um problema.
- Aplicar o Teorema de Pitágoras.
- Fazer construções respeitando a escala dada.
- Determinar a escala de uma imagem sendo conhecidas algumas medidas da mesma.
- Promover um clima favorável à aprendizagem, ao bem-estar e ao desenvolvimento afectivo, emocional e social dos alunos.

Tarefas:

Serão realizadas as Tarefas 1, 2 e 3 da ficha de trabalho n.º 9.

Tarefas extra *:

(*a propor caso a aula se desenvolva mais rapidamente que o previsto ou alguns alunos terminem as tarefas propostas antes da maioria da turma***)**

- Tarefa 6 – Página 64.
- Alíneas a), b) e c) da Tarefa 7 – Página 64.

Recursos:

- Ficha de trabalho;
- Material de desenho: compasso, régua e lápis;
- *DataShow*;
- Computador;
- Resolução da Tarefa 3 a) (efectuada em *GeoGebra*);
- Quadro;
- Manual[4] *.

Desenvolvimento da aula:

0. Antes de iniciar a aula distribuir a ficha pelas mesas.

1. Escrita do sumário por parte dos alunos. ***(5 minutos)***

2. Realização (a pares) da Tarefa 1. ***(10 minutos)***

3. Discussão da Tarefa 1 (em grande grupo): ***(20 minutos)***

3.1. Alínea a):

3.1.1. Pedir a um aluno para apresentar a sua resolução fazendo um esboço da mesma sobre a projecção da planta da casa do Luís.

3.1.2. Pedir a opinião dos restantes alunos em relação ao apresentado e perguntar se resolveram a tarefa de forma diferente.

[4] Passos, Iolanda & Correia, Olga. (2009). *Matemática em acção – 8.º ano/ 3.º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Lisboa Editora

3.1.3. Perguntar à turma qual a característica comum aos pontos que constituem a circunferência.

- Neste momento deve ser mencionado que para se construir uma circunferência é necessário conhecer o seu centro e raio.
- E deve ser escrita a seguinte definição no quadro:

> ***Circunferência de centro* C *e raio* r** *é o conjunto dos pontos do plano cuja distância a* C *é igual a* r.

3.1.4. Ilustrar a propriedade que define a circunferência utilizando o compasso, referindo o seguinte:

- O bico do compasso marca o centro da circunferência.
- A abertura, ou seja, a distância entre o bico e o carvão, corresponde ao raio.
- Concluir que com o compasso construímos uma circunferência porque fixamos o centro e não alteramos a abertura do mesmo durante a construção. Portanto, todos os pontos obtidos ficam a igual distância do centro.

3.2. Alínea b):

3.2.1. Pedir a um aluno (voluntário) para apresentar a sua resolução fazendo um esboço da mesma sobre a projecção da planta da casa do Luís.

3.2.2. Pedir a opinião dos restantes alunos em relação ao apresentado e perguntar se resolveram a tarefa de forma diferente.

3.2.3. Perguntar à turma qual a característica comum aos pontos que constituem o círculo.

- Neste momento deve ser mencionado que para se construir um círculo é necessário conhecer o seu centro e raio.
- E deve ser pedido à turma para definir círculo, sendo escrita uma definição, semelhante à seguinte, no quadro:

> ***Círculo de centro* C *e raio* r** *é o conjunto dos pontos do plano cuja distância a* C *é menor ou igual a* r.

- Concluir que o círculo inclui todos os pontos da circunferência e, também, os que estão no interior da mesma.

3.3. Introduzir a definição de lugar geométrico:

3.3.1. O professor deve explicar que um lugar geométrico é o conjunto dos pontos que têm uma propriedade comum, escrevendo essa mesma definição no quadro.

Lugar geométrico *é o conjunto de todos os pontos que têm uma condição comum.*

3.3.2. O professor deve dizer que tanto a circunferência como o círculo são exemplos de lugares geométricos, pois têm propriedades que os caracterizam.

3.3.3. Perguntar à turma quais as propriedades que caracterizam círculo e circunferência.

3.3.4. Rever as propriedades que caracterizam círculo e circunferência, salientando as diferenças entre elas.

4. Realização (a pares) da Tarefa 2. ***(10 minutos)***

5. Discussão da Tarefa 2 (em grande grupo). ***(15 minutos)***

5.1. Alínea a):

5.1.1. Pedir a um aluno (voluntário) para apresentar a sua resolução fazendo um esboço da mesma sobre a projecção do mapa de Portugal Continental.

5.1.2. Pedir a opinião dos restantes alunos em relação ao apresentado e perguntar se resolveram a tarefa de forma diferente.

5.1.3. Perguntar à turma se nesta resolução está envolvido algum lugar geométrico, qual é e que propriedade verifica.

5.1.4. Explicar que:

- a região encontrada corresponde ao interior do círculo, ou seja, não inclui a circunferência, uma vez que os pontos encontrados estão a ***menos*** de 75 km de Aveiro, não igualando essa distância;
- mas, tendo em conta o problema, têm de se excluir todos os pontos que, apesar de estarem nessas condições, não pertencem a Portugal Continental.

5.2. Alínea b):

5.2.1. Pedir a um aluno (voluntário) para apresentar a sua resolução fazendo um esboço da mesma sobre a projecção do mapa de Portugal Continental.

5.2.2. Pedir a opinião dos restantes alunos em relação ao apresentado e perguntar se resolveram a tarefa de forma diferente.

5.2.3. Perguntar à turma se nesta resolução está envolvido algum lugar geométrico, qual é e que propriedade verifica.

5.2.4. Explicar que:

- a região encontrada corresponde ao exterior do círculo/circunferência, ou seja, é o conjunto dos pontos que não fazem parte do círculo, estando a ***mais*** de 150 km da Régua;

- mas, tendo em conta o problema, têm de se excluir todos os pontos que, apesar de estarem nessas condições, não pertencem a Portugal Continental.

5.3. Concluir a discussão revendo os conceitos de circunferência e círculo. Explicar, também, que num problema não basta encontrar um lugar geométrico, visto que, depois de o fazer, tem de se verificar se este se adequa ao contexto do problema.

6. Realização (a pares) da Tarefa 3. ***(10 minutos)***

7. Discussão da Tarefa 3 (em grande grupo). ***(15 minutos)***

7.1. Alínea a):

7.1.1. Pedir a um aluno (voluntário) para apresentar a sua resolução fazendo um esboço da mesma sobre a projecção da planta do quarto da Celeste.

7.1.2. Pedir a opinião dos restantes alunos em relação ao apresentado e perguntar se resolveram a tarefa de forma diferente.

7.1.3. Perguntar à turma se nesta resolução está envolvido algum lugar geométrico, qual é e que propriedade verifica.

7.1.4. Explicar que devido à esquina do quarto da celeste, não podemos considerar um círculo, mas dois sectores circulares, uma vez que o fio não pode atravessar as duas paredes que a formam.

- ilustrar esse facto com a resolução efectuada em *GeoGebra*.

7.2. Alínea b):

7.2.1. Pedir a um aluno (voluntário) para ir ao quadro apresentar a sua resolução.

7.2.2. Pedir a opinião dos restantes alunos em relação ao apresentado e perguntar se resolveram a tarefa de forma diferente.

7.2.3. Explicar que:

- se têm de identificar os pontos mais afastados da tomada, pois, chegando a esses pontos, torna-se possível aspirar todo o quarto;
- se se aplicar o Teorema de Pitágoras num triângulo em que o ponto T não seja um vértice, ao resultado obtido terá de ser somada a distância do ponto T ao vértice do triângulo que mais próximo deste se encontra (comprimento mínimo de fio necessário).

7.3. Concluir a discussão salientando a importância do contexto do problema na escolha de um lugar adequado à resolução do mesmo.

8. Marcar os trabalhos de casa: ***(5 minutos)***

- resolver novamente a Tarefa 1, mas utilizando o *GeoGebra* (esta resolução deverá enviada por e-mail até 11.03.2010);
- fazer a tarefa 12 da página 67 do manual (numa folha à parte para entregar).

9. Recolher a ficha de trabalho realizada pelos alunos.

Avaliação:

A ficha de trabalho e os ficheiros elaborados em *GeoGebra* serão entregues, para, posteriormente, serem avaliados e analisadas as produções e desempenho dos alunos.

2.ª Aula (11 de Março de 2010)

Tema: Superfície esférica, esfera.

Sumário

Correcção dos trabalhos de casa.

Lugares geométricos no espaço: esfera e superfície esférica.

Conteúdos / Conceitos:	**Pré-requisitos:**
• Superfície esférica; • Esfera.	• Circunferência; • Teorema de Pitágoras.

Objectivos:

- Identificar o conjunto dos pontos do plano que estão a uma distância *d* de um ponto dado.
- Identificar o conjunto dos pontos do espaço que estão a uma distância menor ou igual a *d* de um ponto dado.
- Identificar o conjunto dos pontos do espaço que estão a uma distância *d* de um ponto dado.
- Resolver problemas.
- Descrever e justificar, oralmente e por escrito, o processo e estratégias usados na resolução de um problema.
- Aplicar o Teorema de Pitágoras.
- Promover um clima favorável à aprendizagem, ao bem-estar e ao desenvolvimento afectivo, emocional e social dos alunos.

Tarefas:

Será discutida a Tarefa 12 da Página 67 do manual.

Será realizada a Tarefa 1 da ficha de trabalho n.º 10.

Tarefas extra:

(*a propor caso a aula se desenvolva mais rapidamente que o previsto ou alguns alunos terminem as tarefas propostas antes da maioria da turma***)**

- Tarefa 10 – Página 66.
- Tarefa 11 – Página 66.

Recursos:

- Manual;
- Quadro;
- Computador;
- Ficheiro com a representação do movimento efectuado na Tarefa 12;
- *DataShow*;
- Ficha de trabalho.

Desenvolvimento da aula:

0. Antes de iniciar a aula distribuir a ficha pelas mesas.

1. Escrita do sumário por parte dos alunos. ***(10 minutos)***

2. Recolher os trabalhos de casa dos alunos.

3. Discussão da Tarefa 12 (trabalho de casa) da página 67 do manual (em grande grupo): ***(15 minutos)***

3.1. Alínea 12.1 a):

3.1.1. Pedir a um aluno (voluntário) para ir ao quadro apresentar a sua resolução.

3.1.2. Pedir a opinião dos restantes alunos em relação ao apresentado e perguntar se chegaram a uma conclusão diferente.

3.1.3. Perguntar porque é que o lugar geométrico obtido é uma circunferência, procurando que os alunos relembrem a propriedade que o caracteriza e indiquem o seu centro (Q) e raio (3 dm).

3.1.4. Mostrar aos alunos o ficheiro que ilustra a rotação efectuada.

3.2. Alínea 12.1 b):

3.2.1. Pedir ao aluno que se encontra no quadro (o mesmo que resolveu a tarefa anterior) para apresentar a sua resolução.

3.2.2. Pedir a opinião dos restantes alunos em relação ao apresentado e perguntar se chegaram a uma conclusão diferente.

3.2.3. Perguntar qual a propriedade que caracteriza o lugar geométrico encontrado.

- Neste momento deve ser mencionado que para caracterizar a superfície esférica é necessário conhecer o seu centro e raio.
- E deve perguntar-se aos alunos qual será a definição de superfície esférica (comparando-a com a circunferência), que deverá ser escrita no quadro:

***Superfície esférica de centro* C *e raio* r** *é o conjunto dos pontos do espaço cuja distância a* C *é igual a* r.

3.2.4. Perguntar porque é que o lugar geométrico obtido é uma superfície esférica (ou seja, se verifica a condição indicada), procurando que os alunos indiquem o seu centro (C) e raio (5 dm).

3.2.5. Mostrar aos alunos o ficheiro que ilustra a rotação efectuada.

3.3. Alínea 12.2:

3.3.1. Pedir a um aluno (voluntário) para ir ao quadro apresentar a sua resolução.

3.3.2. Pedir a opinião dos restantes alunos em relação ao apresentado e perguntar se chegaram a uma conclusão diferente.

3.3.3. Perguntar qual a propriedade que caracteriza o lugar geométrico encontrado.

- Neste momento deve ser mencionado que para caracterizar a esfera é necessário conhecer o seu centro e raio.
- Perguntar à turma qual é a definição de esfera, comparando-a com o círculo, e escrevê-la no quadro:

***Esfera de centro* C *e raio* r** *é o conjunto dos pontos do espaço cuja distância a* C *é menor ou igual a* r.

- Concluir que a esfera inclui todos os pontos da superfície esférica e, também, os que estão no interior da mesma.

3.3.4. Perguntar porque é que o lugar geométrico obtido é uma esfera (ou seja, se verifica a condição indicada), procurando que os alunos indiquem o seu centro (C) e raio (5 dm).

3.4. Por fim, o professor deverá fazer uma síntese dos lugares geométricos encontrados e das suas propriedades, reforçando as diferenças entre superfície esférica e esfera.

4. Realização (a pares) da Tarefa 1 da ficha de trabalho. ***(10 minutos)***

Caso não haja tempo para a realização da tarefa, os alunos deverão resolvê-la como trabalho de casa e entregá-la na aula seguinte.

5. Discussão da Tarefa 1 (em grande grupo). ***(10 minutos)***

5.1. Alínea a):

5.1.1. Pedir a um aluno (voluntário) para ir ao quadro apresentar a sua resolução.

5.1.2. Pedir a opinião dos restantes alunos em relação ao apresentado e perguntar se chegaram a uma conclusão diferente.

5.1.3. Perguntar porque é que o lugar geométrico obtido é uma superfície esférica (ou seja, se verifica a propriedade que a caracteriza), procurando que os alunos indiquem o seu centro (C) e raio (4 m).

5.2. Alínea b):

5.2.1. Pedir a um aluno (voluntário) para ir ao quadro apresentar a sua resolução.

5.2.2. Pedir a opinião dos restantes alunos em relação ao apresentado e perguntar se chegaram a uma conclusão diferente.

5.2.3. Perguntar porque é que o lugar geométrico obtido é uma esfera (ou seja, se verifica a propriedade que a caracteriza), procurando que os alunos indiquem o seu centro (C) e raio (5 m).

5.3. Alínea c):

5.3.1. Pedir a um aluno (voluntário) para ir ao quadro apresentar a sua resolução.

5.3.2. Pedir a opinião dos restantes alunos em relação ao apresentado e perguntar se chegaram a uma conclusão diferente.

5.3.3. Perguntar porque é que os dois corpos podem colidir, procurando que os alunos compreendam que, como o corpo B não mantém a sua distância a C, pode, em dado momento, encontrar-se a 4 metros de C, o que pode conduzir à colisão com o corpo A.

5.4. Concluir a discussão revendo os conceitos envolvidos na tarefa (esfera e superfície esférica), assim como as diferenças entre ambos.

6. Terminar a aula recolhendo as fichas de trabalho realizadas pelos alunos.

Avaliação:

Os trabalhos de casa e a ficha de trabalho serão recolhidos para, posteriormente, serem avaliados e analisadas as produções e desempenho dos alunos.

3.ª Aula (12 de Março de 2010)

Tema: Mediatriz de um segmento de recta.

Sumário

Resolução de uma ficha de trabalho relativa à mediatriz de um segmento de recta.

Apresentação e discussão dos resultados.

Conteúdos / Conceitos:	**Pré-requisitos:**
• Mediatriz de um segmento de recta; • Propriedades da mediatriz da corda de uma circunferência.	• Ponto médio de um segmento de recta; • Circunferência; • Triângulo isósceles e suas propriedades relativamente às alturas e eixo de simetria.

Objectivos:

- Reconhecer que o conjunto dos pontos do plano equidistantes dos extremos de um segmento de recta é a recta perpendicular ao segmento e que passa pelo seu ponto médio.
- Construir a mediatriz de um segmento de recta.
- Resolver geometricamente problemas que envolvam a noção de distância entre dois pontos.
- Fazer um esboço que facilite a compreensão e resolução de um problema.
- Descrever e justificar, oralmente e por escrito, o processo usado na resolução de um problema.
- Formular e testar conjecturas.
- Verificar que a mediatriz de uma qualquer corda de uma circunferência contém o centro da mesma.
- Compreender as potencialidades de diferentes recursos na realização de um mesmo problema.
- Promover um clima favorável à aprendizagem, ao bem-estar e ao desenvolvimento

afectivo, emocional e social dos alunos.

Tarefas:

Serão realizadas as Tarefa 1 e 2 da ficha de trabalho n.º 11.

Tarefas extra *:

(*a propor caso a aula se desenvolva mais rapidamente que o previsto ou alguns alunos terminem as tarefas propostas antes da maioria da turma***)**

- Tarefa 18 – Página 73.
- Tarefa 19 – Página 73.
- Tarefa 20 – Página 73.

Recursos:

- Ficha de trabalho;
- *DataShow*;
- Computador;
- *GeoGebra*;
- Quadro;
- Manual *.

Desenvolvimento da aula:

0. Antes de iniciar a aula distribuir a ficha pelas mesas.

1. Escrita do sumário por parte dos alunos. ***(10 minutos)***

2. Realização (a pares) da Tarefa 1. ***(15 minutos)***

3. Discussão da Tarefa 1 (em grande grupo): ***(30 minutos)***

3.1. Alínea 1.1.:

3.1.1. Pedir a um aluno (voluntário) para apresentar a sua resolução.

3.1.2. Pedir a opinião dos restantes alunos e perguntar se chegaram às mesmas conclusões.

3.2. Alínea 1.2.:

3.2.1. O aluno que resolveu a Tarefa 1.1. apresentará a sua resolução repetindo os processos efectuados utilizando o *GeoGebra* no computador que se encontra ligado ao *DataShow*.

3.2.2. Pedir a opinião dos restantes alunos em relação ao apresentado e perguntar se pensaram de forma diferente.

- Caso haja dificuldades em compreender qual o lugar geométrico adequado à questão, recorrer ao que foi feito na alínea anterior para perceber quais os pontos que estão em regiões diferentes.

3.2.3. Perguntar à turma qual o lugar geométrico construído. Colocar questões de modo a procurar que os alunos compreendam os passos que seriam feitos para o construir com material de desenho (todos os alunos repetirão esses passos no *GeoGebra*):

- Como é que procederiam para construir a mediatriz do segmento [AB]?

  (Construir duas circunferências com igual raio, mas superior a metade do comprimento de [AB], uma de centro em A e outra em B.)

- Que pontos unimos para construir a mediatriz? Porquê?

  (Como os raios de ambas as circunferências são iguais, os pontos onde estas se intersectam são equidistantes a A e a B – marcar esses pontos no *GeoGebra* e medir as distâncias a A e a B para confirmar essa igualdade.)

- E se construirmos as circunferências com outro raio? Ainda obtemos o mesmo lugar geométrico?

  (Os pontos de intersecção serão equidistantes dos extremos, estando também na mediatriz – mover as circunferências, de modo a alterar-lhe o raio para o verificar.)

- Será que qualquer ponto da mediatriz é equidistante de A e de B?

  (Marcar um ponto na mediatriz construída, medir a distância deste a A a B e, por fim, mover o ponto ao longo da mediatriz verificando que é equidistante a A e a B)

- Concluir que a mediatriz de um segmento de recta é o lugar geométrico procurado, escrevendo a seguinte definição:

  Mediatriz de um segmento de recta **[AB]** *é o conjunto dos pontos do plano que estão à mesma distância de* A *e de* B.

3.3. Alínea 1.3.:

3.3.1. Pedir a um aluno (voluntário) para apresentar a sua resolução repetindo os processos efectuados utilizando o *GeoGebra* no computador que se encontra ligado ao *DataShow*.

3.3.2. Pedir a opinião dos restantes alunos em relação ao apresentado e perguntar se pensaram de forma diferente.

3.3.3. Perguntar aos alunos qual o nome do ponto encontrado (ponto médio) e porque é que este é o mais adequado à construção do gabinete.

- Procurar que os alunos compreendam que esse ponto é equidistante das duas pizzarias (encontrando-se na mediatriz) e que é aquele que, nessas condições, é mais próximo de ambas. (Podem comprová-lo movimentando um ponto na mediatriz e medindo a distância deste às pizzarias.)

3.3.4. Concluir que a mediatriz de um segmento de recta contém o ponto médio do mesmo, uma vez que este verifica a propriedade que a define (é equidistante dos extremos).

3.4. Procurar que os alunos deduzam que a mediatriz de um segmento é perpendicular ao mesmo:

- Marcar um ponto *C* na mediatriz de [AB].
- Colocar as seguintes questões aos alunos:
    - Como classificam o triângulo [ABC]? Porquê? (isósceles)
    - Pensando neste triângulo, que recta é aquela que traçámos? (eixo de simetria do triângulo, contém a altura relativamente a [AB])
    - Qual a posição relativa entre a recta construída e o segmento [AB]? (perpendicular)
- Concluir que a mediatriz de um segmento é perpendicular ao mesmo e, também, que é um eixo de simetria deste. (Os alunos deverão medir o ângulo no *GeoGebra* para o verificarem.)

3.4.1. Fazer uma síntese das conclusões obtidas revendo a definição de mediatriz e, escrevendo, em conjunto com os alunos, o seguinte:

Propriedades da mediatriz de um segmento de recta:

- *Contém o ponto médio do segmento;*
- *É perpendicular ao segmento;*
- *Coincide com um eixo de simetria do segmento.*

4. Realização (a pares) da Tarefa 2. ***(15 minutos)***

- Durante a realização, procurar que os alunos usem o arrastamento de pontos do *GeoGebra* para generalizarem a sua conclusão.

5. Discussão da Tarefa 2 (em grande grupo): ***(15 minutos)***

5.1. Pedir a um aluno (voluntário) para apresentar a sua resolução repetindo os processos efectuados utilizando o *GeoGebra* no computador que se encontra ligado ao *DataShow*.

- Perguntar como é que o par desse aluno procedeu para resolver a tarefa usando o *GeoGebra*.
- Comparar esse processo com a resolução que seria feita com manual de desenho.

5.2. Perguntar aos restantes alunos se verificaram a mesma conclusão.

5.3. Pedir ao aluno que apresentou a sua resolução para utilizar o arrastamento de pontos, mostrando aos colegas que, independentemente do centro e do raio duma circunferência, a mediatriz de qualquer corda da mesma contém o centro da circunferência.

5.4. Concluir a discussão revendo o conceito de mediatriz de um segmento e as suas propriedades.

6. Marcar os trabalhos de casa: ***(5 minutos)***

- fazer a Tarefa 28 da Página 75 do manual (numa folha à parte para entregar).

7. Recolher a ficha de trabalho realizada pelos alunos.

Avaliação:

Os ficheiros realizados para resolver a ficha de trabalho serão enviados e a ficha de trabalho será recolhida para, posteriormente, serem avaliados e analisadas as produções e desempenho dos alunos.

4.ª Aula (15 de Março de 2010)

Tema: Circunferência circunscrita.

Sumário

Circuncentro de um triângulo.

Resolução de uma ficha de trabalho. Apresentação e discussão dos resultados.

Conteúdos / Conceitos:	**Pré-requisitos:**
• Circuncentro; • Circunferência circunscrita.	• Circunferência; • Mediatriz de um segmento de recta; • Classificação de um triângulo quanto aos ângulos.

Objectivos:

- Construir a mediatriz de um segmento de recta e a circunferência circunscrita a um triângulo dado.
- Reconhecer que qualquer ponto da mediatriz de um segmento é equidistante dos extremos do mesmo.
- Resolver geometricamente problemas que envolvam a noção de distância entre dois pontos.
- Fazer um esboço que facilite a compreensão e resolução de um problema.
- Descrever e justificar, oralmente e por escrito, o processo usado na resolução de um problema.
- Formular e testar conjecturas.
- Compreender que o local onde se encontra o circuncentro de um triângulo depende da amplitude dos ângulos do mesmo.
- Compreender as potencialidades de diferentes recursos na realização de um mesmo problema.
- Promover um clima favorável à aprendizagem, ao bem-estar e ao desenvolvimento afectivo, emocional e social dos alunos.

Tarefas:

Será discutida a Tarefa 28 da Página 75 do manual.

Serão realizadas as Tarefas 1 e 2 da ficha de trabalho n.º 12.

Tarefas extra *:

(*a propor caso a aula se desenvolva mais rapidamente que o previsto ou alguns alunos terminem as tarefas propostas antes da maioria da turma***)**

- Tarefa 34 – Página 76.

Recursos:

- Material de desenho: compasso, régua e lápis.
- Ficha de trabalho;
- *DataShow*;
- Computador;
- *GeoGebra*;
- Quadro;
- Manual.

Desenvolvimento da aula:

0. Antes de iniciar a aula distribuir a ficha pelas mesas.

1. Escrita do sumário por parte dos alunos. ***(10 minutos)***

2. Discussão da Tarefa 28 (trabalho de casa) da página 75 do manual (em grande grupo): ***(10 minutos)***

2.1. Pedir aos alunos para registar a resolução dos colegas a outra cor, na folha onde fizeram o trabalho.

2.2. Pedir a um aluno (voluntário) para ir ao quadro apresentar a sua resolução.

2.3. Alínea 28.1:

2.3.1. Pedir a opinião dos restantes alunos em relação ao apresentado e perguntar se chegaram a uma conclusão diferente.

2.3.2. Explicar que, como foi visto na aula anterior, o lugar geométrico encontrado (conjunto dos pontos do plano equidistantes a dois outros pontos A e B) é a mediatriz do segmento [AB].

2.4. Alínea 28.2:

2.4.1. Pedir a opinião dos restantes alunos em relação ao apresentado e perguntar se chegaram a uma conclusão diferente.

2.4.2. Explicar que, tal como na alínea anterior, o lugar geométrico procurado é a mediatriz de um segmento de recta ([BC]).

2.5. Alínea 28.3:

2.5.1. Pedir a opinião dos restantes alunos em relação ao apresentado e perguntar se chegaram a uma conclusão diferente.

2.5.2. Explicar que, $\overline{OA} = \overline{OB}$ porque o ponto O se encontra na mediatriz do segmento [AB]. E que, da mesma forma $\overline{OB} = \overline{OC}$ porque O também pertence à mediatriz do segmento [BC].

2.6. Alínea 28.4:

2.6.1. Perguntar se todos os alunos chegaram à conclusão apresentada.

2.6.2. Explicar que, dada a igualdade $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$, o ponto O está à mesma distância de A, de B e de C, ou seja, é equidistante dos três pontos.

2.7. Concluir a discussão revendo o conceito de mediatriz de um segmento de recta.

3. Realização (a pares) da Tarefa 1.1. da ficha de trabalho. ***(15 minutos)***

4. Discussão da Tarefa 1.1. (em grande grupo): ***(10 minutos)***

4.1. Pedir a um aluno (voluntário) para apresentar a resolução do par, repetindo os processos efectuados no computador que se encontra ligado ao *DataShow*.

- Perguntar como é que o par a que o aluno pertence procedeu para resolver a tarefa usando o *GeoGebra*.
- Comparar esse processo com a resolução que seria feita usando material de desenho.

4.2. Pedir a opinião dos restantes alunos em relação ao apresentado e perguntar se pensaram de forma diferente.

4.3. Explicar que o ponto procurado é a intersecção de três lugares geométricos, pois para que um ponto seja equidistante de três outros, tem de ser equidistante de cada par de pontos (pertencer a cada uma das mediatrizes do segmento cujos extremos é um par desses pontos).

5. Realização (a pares) da Tarefa 1.2..(***10 minutos)***

- Explicar que, usando o *GeoGebra*, os alunos podem arrastar os pontos e observar o que acontece.

6. Discussão da Tarefa 1.2. (em grande grupo): ***(15 minutos)***

6.1. Pedir a um aluno (voluntário) para apresentar a resolução que fez com o seu par, repetindo os processos efectuados no computador que se encontra ligado ao *DataShow*.

6.2. Pedir a opinião dos restantes alunos em relação ao apresentado e perguntar se pensaram de forma diferente e se encontraram mais situações em que o problema não tem solução.

6.3. Procurar que os alunos percebam quando o problema tem solução e quando não tem, utilizando o arrastando de pontos do *GeoGebra*:

- Verificar que para quaisquer três pontos não colineares (que podem corresponder a vértices de um triângulo), o problema tem solução.
    - O professor deverá mencionar que o ponto encontrado é o ***circuncentro*** do triângulo e que, esse ponto é também o centro duma circunferência (***circunferência circunscrita***) que contem os três vértices do triângulo, estando o triângulo inscrito nesta.
    - Essa circunferência deverá ser desenhada para ilustrar a situação.
- No caso dos pontos serem colineares, verificar que se conseguem determinar os lugares geométricos equidistantes a cada dois pontos, mas que estes não se intersectam, pois as rectas encontradas são paralelas, pelo que não se consegue verificar a condição pedida, não existindo solução para o problema.

6.4. Por fim, o professor deve fazer uma síntese das estratégias expostas e dos conceitos envolvidos: mediatriz, circuncentro e circunferência circunscrita; salientado que todos os triângulos têm circuncentro e que basta traçar duas das mediatrizes do triângulo para o obter.

7. Realização (a pares) da Tarefa 2. ***(10 minutos)***

Caso não haja tempo para realizar esta tarefa, os alunos deverão fazê-la como trabalho de casa e entregá-la até dia 20 de Março.

8. Discussão da Tarefa 2. (em grande grupo): ***(10 minutos)***

8.1. Pedir a um aluno (voluntário) para apresentar resolução do par a que pertence.

8.2. Pedir a opinião dos restantes alunos em relação ao apresentado e perguntar se pensaram de forma diferente.

8.3. Concluir que o local onde se encontra o circuncentro depende dos ângulos do triângulo:

- Triângulo acutângulo – circuncentro no interior do triângulo;
- Triângulo obtusângulo – circuncentro no exterior do triângulo;
- Triângulo rectângulo – circuncentro sobre a hipotenusa.

8.4. Ilustrar as conclusões obtidas utilizando o arrastamento de pontos e a medição de ângulos do *GeoGebra*.

9. Recolher a ficha de trabalho e os trabalhos de casa dos alunos. Pedir aos alunos para enviarem por e-mail a resolução da tarefa (até 16.03.2010), não esquecendo que as justificações e as respostas devem constar do ficheiro feito em aula.

Avaliação:

Os ficheiros realizados para resolver a ficha de trabalho serão enviados e a ficha de trabalho será recolhida para, posteriormente, serem avaliados e analisadas as produções e desempenho dos alunos.

5.ª Aula (22 de Março de 2010)

Tema: Conjunção e disjunção de condições. Intersecção e reunião de conjuntos.

Sumário

Realização de uma ficha de trabalho sobre conjunção e disjunção de condições.

Apresentação e discussão dos resultados.

Conteúdos / Conceitos:	**Pré-requisitos:**
• Conjunção de condições/ Intersecção de conjuntos; • Coroa circular; • Disjunção de condições/ Reunião de conjuntos.	• Circunferência; • Círculo; • Mediatriz de um segmento de recta.

Objectivos:

- Determinar o conjunto de pontos que satisfazem uma conjunção ou uma disjunção de condições.
- Identificar o conjunto dos pontos do plano que estão a uma distância menor, maior ou igual a *d* de um ponto dado.
- Construir círculo e circunferência.
- Resolver geometricamente problemas que envolvam a noção de distância entre dois pontos.
- Reconhecer que o conjunto dos pontos do plano equidistantes dos extremos de um segmento de recta é a recta perpendicular ao segmento e que passa pelo seu ponto médio.
- Construir a mediatriz de um segmento de recta.
- Fazer um esboço que facilite a compreensão e resolução de um problema.
- Descrever e justificar, oralmente e por escrito, o processo e estratégias usados na resolução de um problema.
- Compreender as potencialidades de diferentes recursos na realização de um mesmo problema.

- Promover um clima favorável à aprendizagem, ao bem-estar e ao desenvolvimento afectivo, emocional e social dos alunos.

Tarefas:

Serão realizadas as tarefas 1 e 2 da ficha de trabalho n.º 13.

Tarefas extra *:

(*a propor caso a aula se desenvolva mais rapidamente que o previsto ou alguns alunos terminem as tarefas propostas antes da maioria da turma*)

- Tarefa 62 – Página 88.
- Tarefa 64 – Página 89.

Recursos:

- Ficha de trabalho;
- Material de desenho: compasso, régua e lápis;
- *DataShow*;
- Computador;
- *GeoGebra*;
- Quadro;
- Manual *.

Desenvolvimento da aula:

0. Antes de iniciar a aula distribuir a ficha pelas mesas.

1. Escrita do sumário por parte dos alunos. ***(10 minutos)***

2. Realização (em grupos de 4 alunos) da Tarefa 1. ***(20 minutos)***

3. Discussão da Tarefa 1 (em grande grupo): ***(25 minutos)***

3.1. Alínea 1.1.:

3.1.1. Pedir a um aluno (voluntário) para apresentar a sua resolução repetindo os processos efectuados utilizando o *GeoGebra* no computador que se encontra ligado ao *DataShow*.

- Perguntar como é que o aluno procedeu para fazer o problema utilizando material de desenho.
- Comparar esse processo com a resolução no *GeoGebra*.

3.1.2. Pedir a opinião dos restantes alunos em relação ao apresentado e perguntar se resolveram a tarefa de forma diferente.

3.1.3. Explicar que a região onde a Celeste deve procurar a Violeta resulta da conjunção de duas condições, o que corresponde à intersecção de dois conjuntos de pontos:

- Perguntar aos alunos quais são as duas condições e escrevê-las no quadro dando-lhes os nomes *a* e *b*.
    - *Condição* ***a***: "estar a uma distância maior ou igual a 25 metros da Gare do Oriente".
    - *Condição* ***b***: "estar a uma distância menor ou igual a 50 metros da Gare do Oriente".
- Dizer que o lugar geométrico encontrado corresponde à conjunção dessas duas condições, que simbolicamente se escreve $a \wedge b$, em que $\wedge$ significa *e (conjunção)*.
- Explicar que cada condição corresponde a um conjunto de pontos e perguntar quais os conjuntos associados a cada uma delas, representando-os por *A* e *B*, respectivamente.
    - ***A*** = {Pontos cuja distância à Gare do Oriente é maior ou igual a 25 metros}.
    - ***B*** = {Pontos do círculo de centro na Gare do Oriente e raio 50 metros}.
- Dizer que o lugar geométrico encontrado corresponde à intersecção desses dois conjuntos, que simbolicamente se escreve $A \cap B$, em que $\cap$ significa *intersecção*.

3.1.4. Referir que o lugar geométrico encontrado tem uma denominação própria: *coroa circular*.

3.2. Alínea 1.2.:

3.2.1. Pedir a um aluno (voluntário) para apresentar a sua resolução repetindo os processos efectuados utilizando o *GeoGebra* no computador que se encontra ligado ao *DataShow*.

- Perguntar como é que o aluno procedeu para fazer o problema utilizando material de desenho.
- Comparar esse processo com a resolução no *GeoGebra*.

3.2.2. Pedir a opinião dos restantes alunos em relação ao apresentado e perguntar se resolveram a tarefa de forma diferente.

3.2.3. Explicar que a região onde a Celeste e a Violeta devem procurar o Luís resulta da disjunção de duas condições, o que corresponde à reunião de dois conjuntos de pontos:

- Perguntar aos alunos quais são as duas condições e escrevê-las no quadro dando-lhes os nomes *c* e *d*.
  - *Condição **c***: "estar a uma distância menor que 50 metros da paragem *A*".
  - *Condição **d***: "estar a uma distância menor que 50 metros da paragem *B*".
- Dizer que o lugar geométrico encontrado corresponde à disjunção dessas duas condições, que simbolicamente se escreve $c \vee d$, em que $\vee$ significa *ou (disjunção)*.
- Explicar que cada condição corresponde a um conjunto de pontos e perguntar quais os conjuntos associados a cada uma delas, representando-os por *C* e *D*, respectivamente.
  - ***C*** = {Pontos interiores à circunferência de centro em *A* e raio 50 metros}.
  - ***D*** = {Pontos interiores à circunferência de centro em *B* e raio 50 metros}.
- Dizer que o lugar geométrico encontrado corresponde à reunião desses dois conjuntos, que simbolicamente se escreve $C \cup D$, em que $\cup$ significa *reunião*.

3.3. Por fim, o professor deve fazer uma síntese das noções de conjunção/intersecção e disjunção/reunião salientando as suas diferenças.

4. Realização (em grupos de 4 alunos) da Tarefa 2. ***(15 minutos)***

5. Discussão da Tarefa 2 (em grande grupo): ***(15 minutos)***

5.1. Pedir a um aluno (voluntário) para apresentar a sua resolução repetindo os processos efectuados utilizando o *GeoGebra* no computador que se encontra ligado ao *DataShow*.

- Perguntar como é que o aluno procedeu para fazer o problema utilizando material de desenho.
- Comparar esse processo com a resolução no *GeoGebra*.

5.2. Pedir a opinião dos restantes alunos em relação ao apresentado e perguntar se resolveram a tarefa de forma diferente.

5.3. Perguntar quantas e quais as conjunções e respectivos conjuntos, estão envolvidos no problema.

- Um aluno (voluntário) irá escrevê-los no quadro.

5.4. Perguntar se estamos perante uma conjunção ou uma disjunção de condições. E também se estamos perante uma intersecção ou uma reunião de conjuntos.

- O aluno que se encontra no quadro deverá fazer a representação da conjunção e respectiva intersecção a que se refere o problema.

5.5. Por fim, o professor deve fazer uma síntese das conclusões obtidas e salientar que no problema se encontrou um lugar geométrico resultante da conjunção de três condições, ou seja, da intersecção de três conjuntos de pontos.

6. Marcar os trabalhos de casa: ***(5 minutos)***

- resolver novamente a Tarefa 2, mas utilizando o *GeoGebra* (esta resolução deverá enviada por e-mail até 27.03.2010);
- fazer a tarefa 63 da página 89 do manual (numa folha à parte para entregar).

7. Recolher a ficha de trabalho realizada pelos alunos.

Avaliação:

A ficha de trabalho e os ficheiros elaborados em *GeoGebra* serão entregues, para, posteriormente, serem avaliados e analisadas as produções e desempenho dos alunos.

6.ª Aula (25 de Março de 2010)

Tema: Conjunção e disjunção de condições. Intersecção e reunião de conjuntos.

Sumário

Conclusão do tema Lugares Geométricos.

Pré-requisitos:

- Conjunção de condições/ Intersecção de conjuntos;
- Circunferência;
- Círculo;
- Mediatriz de um segmento de recta.

Objectivos:

- Determinar o conjunto de pontos que satisfazem uma conjunção de condições.
- Resolver geometricamente problemas que envolvam a noção de distância entre dois pontos.
- Identificar o conjunto dos pontos do plano equidistantes dos extremos de um segmento de recta.
- Construir a mediatriz de um segmento de recta.
- Construir circunferência.
- Fazer um esboço que facilite a compreensão e resolução de um problema.
- Descrever e justificar, oralmente e por escrito, o processo e estratégias usados na resolução de um problema.
- Compreender as potencialidades de diferentes recursos na realização de um mesmo problema.
- Promover um clima favorável à aprendizagem, ao bem-estar e ao desenvolvimento afectivo, emocional e social dos alunos.

Tarefas:

Serão discutidas a Tarefa 63 da página 89 do manual e a Tarefa 2 da ficha de trabalho n.º 13.

Tarefa extra:

(*a propor caso a aula se desenvolva mais rapidamente que o previsto ou alguns alunos terminem as tarefas propostas antes da maioria da turma*)

- Tarefa 66 – Página 90.

Recursos:

- Manual;
- Material de desenho: compasso, régua e lápis;
- *DataShow*;
- Computador;
- *GeoGebra*;
- Quadro;
- Ficha de trabalho.

Desenvolvimento da aula:

0. Antes de iniciar a aula distribuir a ficha pelas mesas.

1. Escrita do sumário por parte dos alunos. ***(10 minutos)***

2. Recolher os trabalhos de casa dos alunos.

3. Discussão da Tarefa 63 (trabalho de casa) da página 89 do manual (em grande grupo): ***(15 minutos)***

3.1. Pedir a um aluno (voluntário) para apresentar a sua resolução repetindo os processos efectuados utilizando o *GeoGebra* no computador que se encontra ligado ao *DataShow*.

- Perguntar como é que o aluno procedeu para fazer o problema utilizando material de desenho.
- Comparar esse processo com a resolução no *GeoGebra*.

3.2. Pedir a opinião dos restantes alunos em relação ao apresentado e perguntar se chegaram a uma conclusão diferente.

3.3. Perguntar quantas e quais as condições e respectivos conjuntos (lugares geométricos), estão envolvidos no problema.

3.4. Perguntar se estamos perante uma conjunção ou uma disjunção de condições.

3.5. Concluir que se construiriam duas mediatrizes de segmentos de recta porque cada uma delas corresponde aos pontos que são equidistantes dos extremos do segmento, o que permite determinar os pontos que estão mais próximos, ou mais afastados dos mesmos.

4. Discussão da Tarefa 2 da ficha n.º 13 (em grande grupo): ***(15 minutos)***

4.1. Pedir a um aluno (voluntário) para apresentar a sua resolução repetindo os processos efectuados utilizando o *GeoGebra* no computador que se encontra ligado ao *DataShow*.

- Perguntar como é que o aluno procedeu para fazer o problema utilizando material de desenho.
- Comparar esse processo com a resolução no *GeoGebra*.

4.2. Pedir a opinião dos restantes alunos em relação ao apresentado e perguntar se resolveram a tarefa de forma diferente.

4.3. Perguntar quantas e quais as condições e respectivos conjuntos, estão envolvidos no problema.

- Um aluno (voluntário) irá escrevê-los no quadro.

4.4. Perguntar se estamos perante uma conjunção ou uma disjunção de condições.

- O aluno que se encontra no quadro deverá fazer a representação da conjunção e da correspondente intersecção a que se refere o problema.

4.5. Por fim, o professor deve fazer uma síntese das conclusões obtidas e salientar que no problema se encontrou um lugar geométrico resultante da conjunção de três condições, ou seja, da intersecção de três conjuntos de pontos. Destacar, também, que nem sempre a intersecção tem de ser uma região, ou seja, um conjunto de vários pontos, pois na tarefa apresentada a intersecção correspondia a um único ponto.

5. Apresentar as soluções de duas tarefas realizadas em outras aulas (Tarefa 3 da ficha de trabalho n.º 9 e Tarefa 1 da ficha de trabalho n.º 12), explicando que a primeira corresponde a uma reunião e a segunda a uma intersecção de conjuntos. ***(5 minutos)***

6. Recolher a ficha de trabalho realizada pelos alunos.

Avaliação:

Os trabalhos de casa e a ficha de trabalho serão recolhidos para, posteriormente, serem avaliados e analisadas as produções e desempenho dos alunos.

Anexos II – Tarefas

1.ª Aula (8 de Março de 2010)

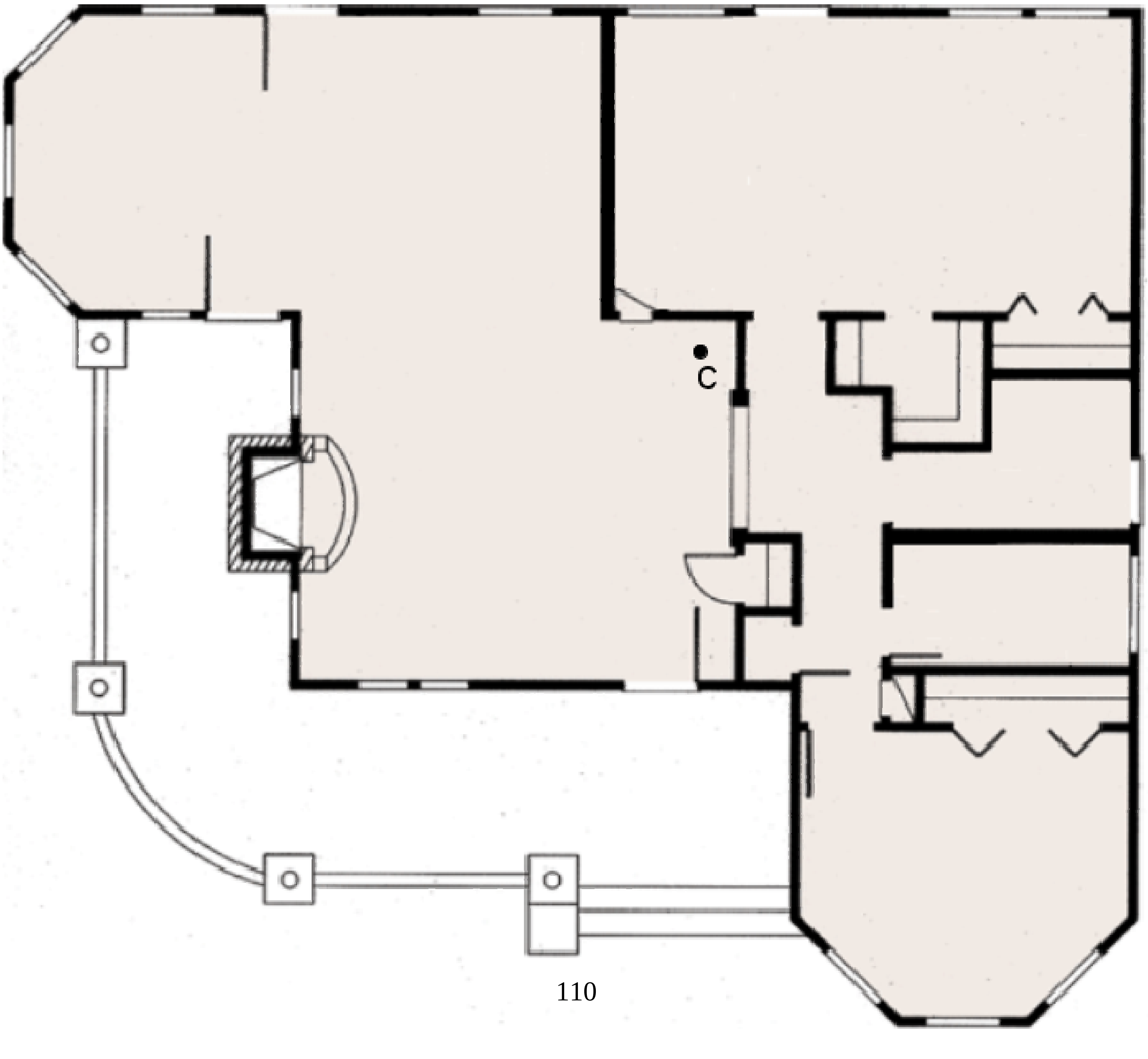
Ficha n.º 9

Utilizem material de desenho para resolver as tarefas que se seguem.

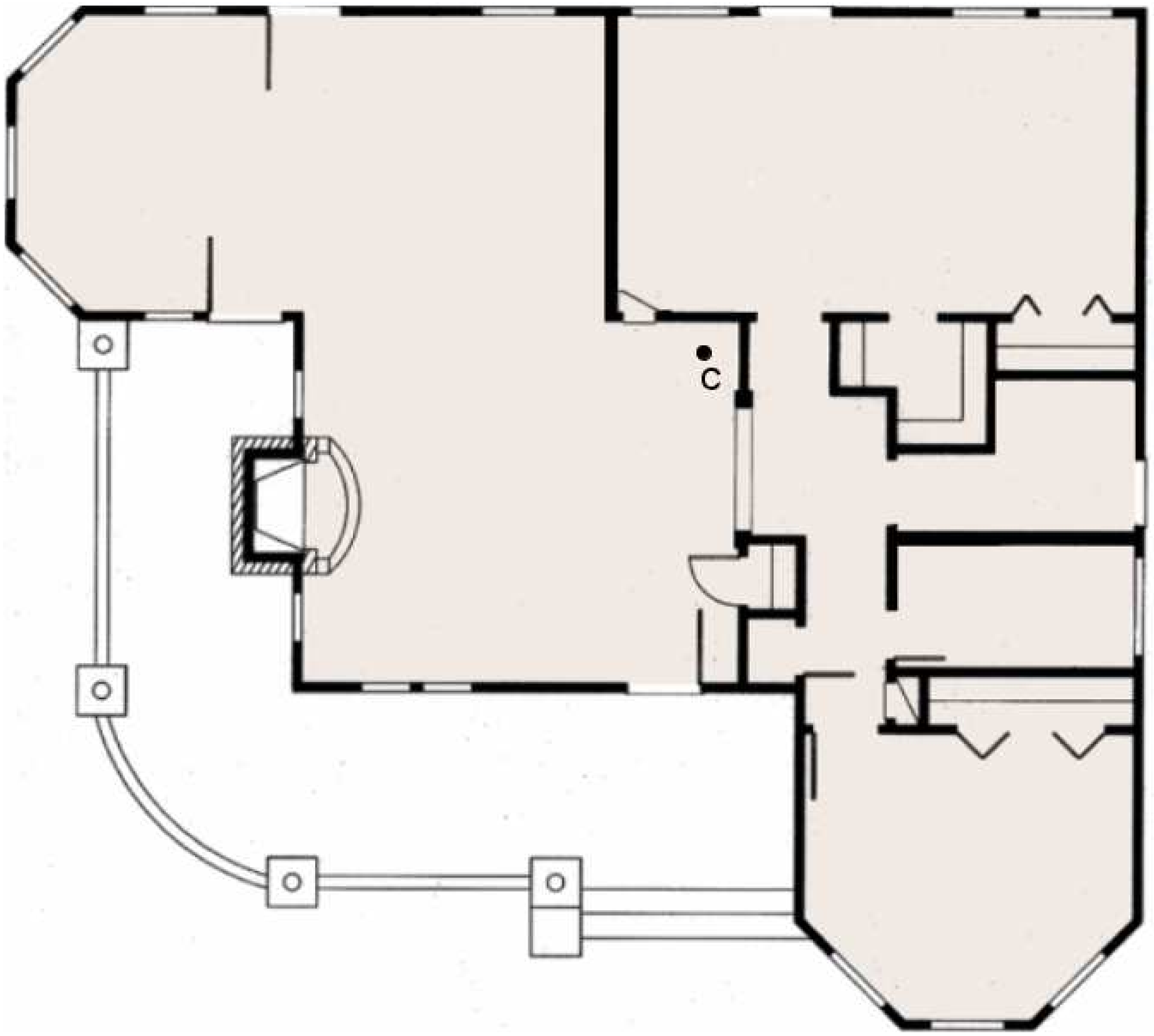
1. O Luís comprou um *router* para ter acesso à internet através do computador de sua casa. Os esquemas que a seguir se apresentam representam a casa do Luís numa escala 1:200, e o ponto *C* corresponde ao seu computador.

Para conseguir obter um bom acesso à internet, o Luís telefonou à assistência para o ajudar a encontrar a melhor localização para o *router*.

a) O assistente pediu-lhe para colocar o aparelho a 7 metros do computador. Onde pode o Luís colocar o *router*? (Assinalem na figura abaixo.)



b) Como o computador continuava sem acesso à internet, o assistente concluiu que o *router* deveria estar a uma distância máxima de 5 metros do computador. Qual a região adequada para a colocação do *router*? (Identifiquem essa região na figura abaixo.)



2. A Violeta, uma habitante da Régua, quer planear as férias da Páscoa e do Verão.

a) Nas férias da Páscoa, a Violeta quer visitar a Casa do Major Pessoa, em Aveiro. Por isso decidiu que iria procurar alojamento em Portugal, mas a menos de 75 km de Aveiro. Onde é que a Violeta vai procurar alojamento? (Assinalem no mapa abaixo.)

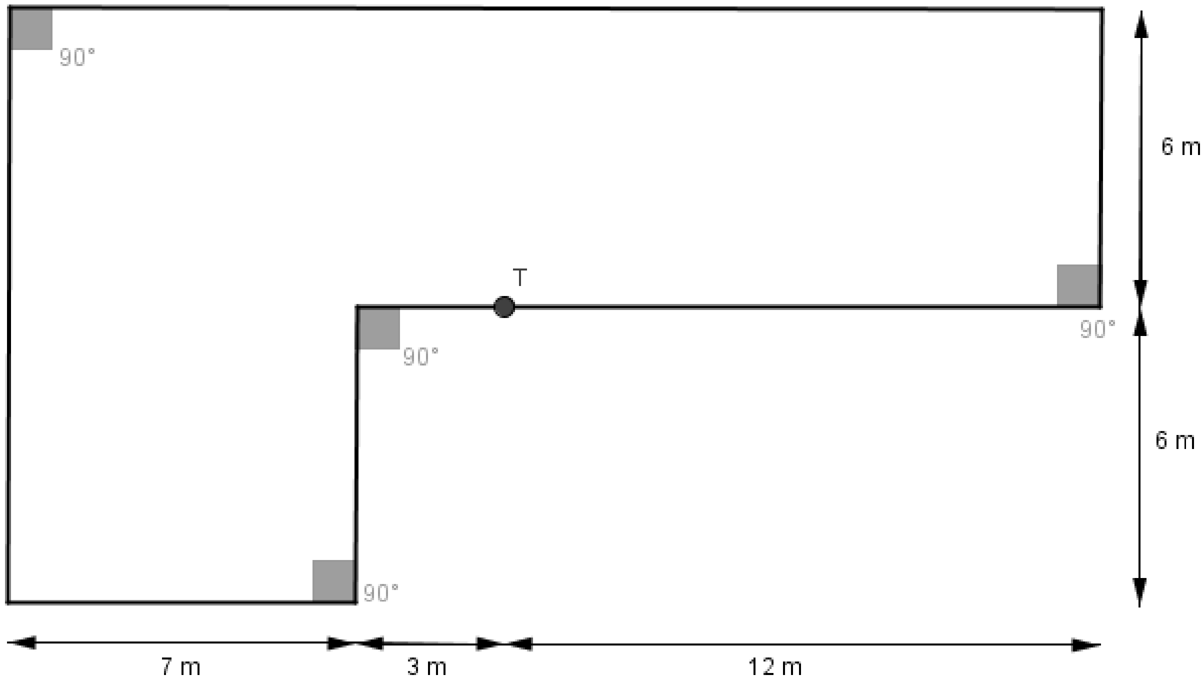
b) A Violeta decidiu que as suas férias de Verão também irão ser passadas em Portugal, mas, para alargar horizontes, quer escolher um destino que fique a mais de 150 km da cidade onde mora. Onde poderá a Violeta passar as suas férias? (Assinalem no mapa abaixo.)

(Adaptado de: Passos, Iolanda & Correia, Olga. (2009). *Matemática em acção – 8.º ano/ 3.º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Lisboa Editora.)

3. A Celeste vai aspirar o seu quarto, que está representado na figura abaixo.

O fio do aspirador tem 5 metros de comprimento e será ligado à tomada representada pelo ponto *T* da figura.

a) Que parte do quarto consegue a Celeste aspirar? (Representem-na na figura abaixo.)



b) Que comprimento teria de ter o fio para que fosse possível aspirar todo o quarto?

(Adaptado de: Neves, M. & Faria, M. (1999). *Exercícios de matemática – 2ª parte – matemática 8.º ano*. Porto: Porto Editora.)

2.ª Aula (11 de Março de 2010)

Página 67 (manual)

12. Na figura, a semicircunferência tem centro no ponto **C**.

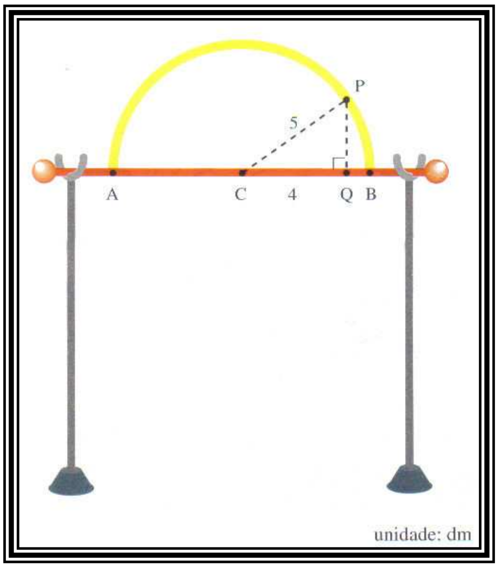
Imagina a semicircunferência a rodar em torno do segmento de recta [AB], dando uma volta completa.

12.1.

a) Ao efectuar-se o movimento de rotação o ponto **P** descreve um lugar geométrico. Qual? Caracteriza-o.

b) No mesmo movimento, qual o lugar geométrico obtido pela semicircunferência de centro **C**?

12.2. Copia a semicircunferência para o caderno e pinta o semicírculo de centro **C**. Qual o lugar geométrico obtido pelo semicírculo no movimento de rotação em torno do segmento de recta [AB]?



Ficheiros apresentados na discussão desta tarefa

Para ilustrar o movimento descrito nesta tarefa, foram construídos dois ficheiros utilizando o programa de Geometria dinâmica *Cabri3D*. A seguir apresentam-se imagens ilustrativas do que consta desses mesmos ficheiros.

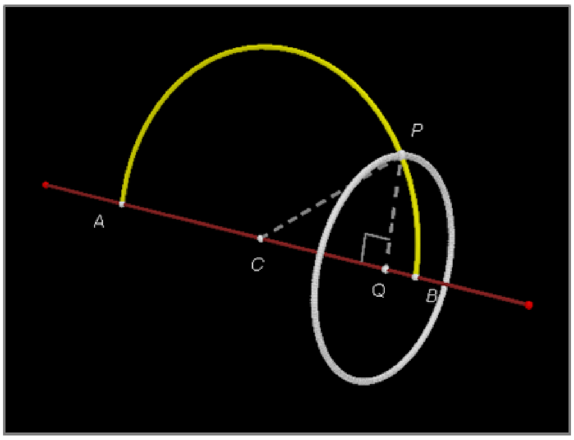


Figura 16 – Ficheiro correspondente à Alínea 12.1. a).

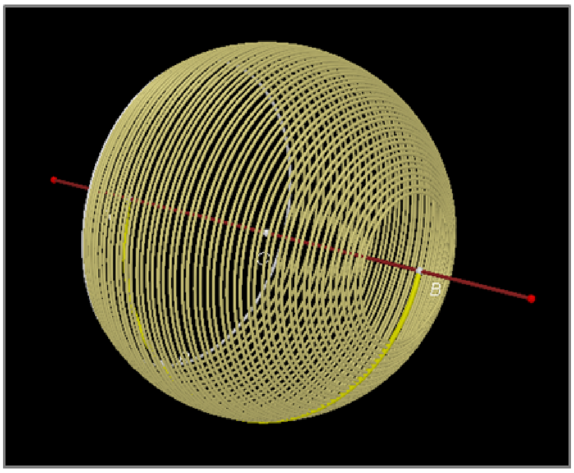


Figura 17 – Ficheiro correspondente à Alínea 12.1. b).

Ficha n.º 10

1. Considerem três corpos A, B e C no espaço. Os corpos A e B encontram-se em movimento enquanto C é um corpo fixo.

No seu movimento, o corpo A mantém-se a uma distância de 4 metros do corpo C, enquanto o corpo B se move nunca ultrapassando os 5 metros de distância relativamente a C.

a) Qual o lugar geométrico de todos os pontos onde o corpo A pode estar?

b) Qual o lugar geométrico de todos os pontos onde o corpo B pode estar?

c) Será que os corpos A e B podem colidir? Expliquem porquê.

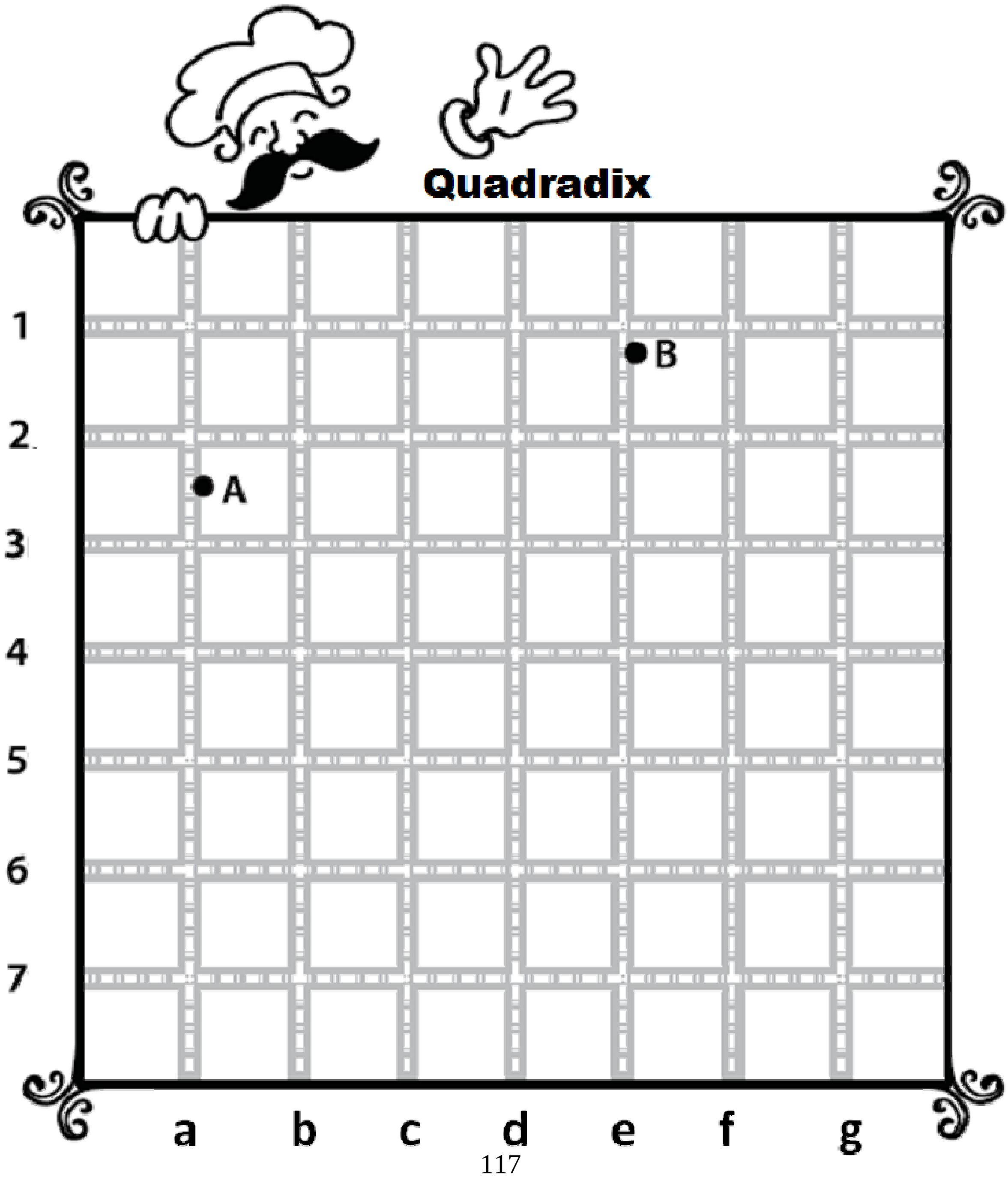
<u>3.ª Aula (12 de Março de 2010)</u>

Ficha n.º 11

Utilizem as ferramentas do *GeoGebra* para resolverem as tarefas que se seguem.

1. Na cidade de *Quadradix* vão ser construídas duas pizzarias de uma mesma empresa.

Para se economizar tempo, o gerente da empresa decidiu fazer as distribuições a partir da pizzaria mais próxima do local de encomenda. Para isso dividiu *Quadradix* em duas regiões: uma região cujas entregas são feitas pela pizzaria A e uma outra que recebe as pizzas da pizzaria B.



1.1. Que pizzaria será responsável pela entrega, se a encomenda for feita a partir do cruzamento:

a) da Rua 1 com a Rua b?

b) da Rua 5 com a Rua e?

c) da Rua 7 com a Rua c?

1.2. Quais foram as duas regiões definidas pela empresa? (Abram o ficheiro *Quadradix.ggb* e assinalem essas regiões.)

Expliquem que lugar geométrico construíram para as determinar.

1.3. As duas pizzarias têm o mesmo gerente, por isso este quer que o seu gabinete fique o mais perto possível de ambas. Qual será o local ideal para construir o seu gabinete? (Representem-no no ficheiro *Quadradix.ggb*.)

(Adaptado de: http://illuminations.nctm.org/LessonDetail.aspx?id=L745.)

2. Utilizando a ferramenta *circunferência dados o centro e um ponto*, construam uma circunferência.

Tracem uma corda dessa circunferência e construam a sua mediatriz.

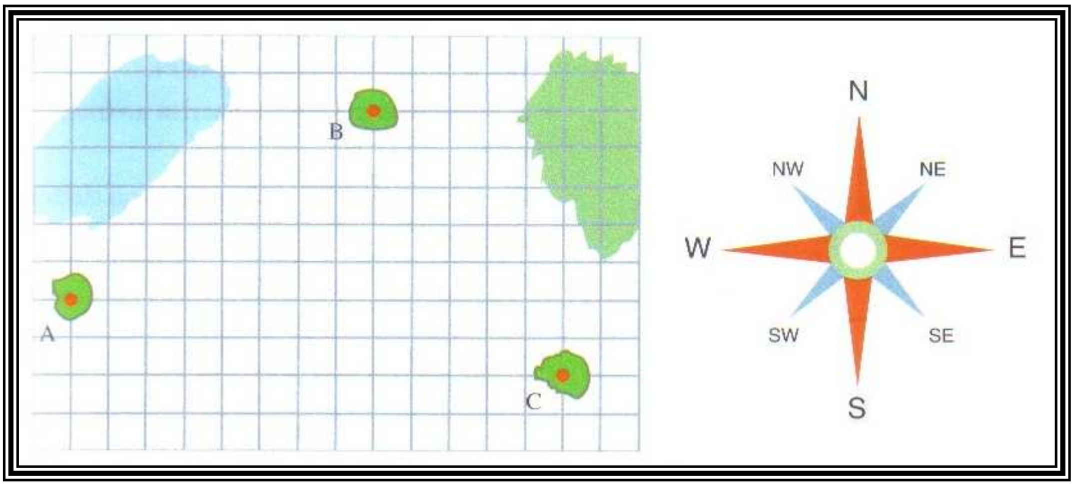
Que verificam? Testem e registem as vossas conclusões.

4.ª Aula (15 de Março de 2010)

Página 75 (manual)

28. As ilhas Rochosas

Observa a figura:



28.1. O barco de pesca "S. José" está em apuros na região sombreada a azul na figura, próximo das ilhas Rochosas, assinaladas na figura por **A**, **B** e **C**.

Entrou em contacto com terra onde recebeu a seguinte informação: *dirigir-se para sudeste (SE), mas manter-se equidistante das ilhas **A** e **B**.*

a) Passa a figura para o teu caderno e desenha a trajectória que o barco deve seguir.

b) Qual o nome do lugar geométrico que desenhaste?

28.2. Um outro barco, o "S.O.S." que se encontra na região verde, vai em auxílio do "S. José". Na sua trajectória vai manter-se à mesma distância das ilhas **B** e **C**.

a) Desenha a trajectória efectuada pelo barco "S.O.S.".

b) Qual o nome do lugar geométrico que desenhaste?

28.3. Os dois barcos vã encontrar-se num ponto. Seja **O** esse ponto.

a) Justifica que $\overline{OA} = \overline{OB}$.

b) Justifica que $\overline{OB} = \overline{OC}$.

28.4. Completa:

Assim, $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$, ou seja, o ponto **O** é …………………… dos pontos **A**, **B** e **C**.

Ficha n.º 12

1. Abram o ficheiro MapaHospital.ggb e, utilizando as ferramentas do *GeoGebra*, resolvam o seguinte problema:

Beja, Évora e Grândola, são três cidades do Alentejo. Apesar de cada cidade ter um hospital para pequenas necessidades e urgências, é necessário um edifício com medicina avançada para efectuar transplantes e fazer pesquisa. Por isso decidiu-se fazer um centro médio nestas condições, de modo a ser partilhado pelas três cidades.

1.1. Imagina que tu e o teu parceiro de equipa foram contratados para determinar um local equidistante às três cidades, para construir este edifício. Onde o vão construir?

1.2. Será que para quaisquer outras três cidades, este problema tem solução?

(Adaptado de: http://illuminations.nctm.org/LessonDetail.aspx?id=L661.)

2. Utilizando as ferramentas do *GeoGebra*, verifiquem em que condições o circuncentro de um triângulo está no seu interior, exterior, ou sobre um dos seus lados.

Ficheiro referido no enunciado da Tarefa 1

Para resolver esta tarefa, os alunos tiveram de abrir um ficheiro por mim construído utilizando o programa de Geometria dinâmica *GeoGebra*, que é ilustrado pela figura que a seguir se apresenta.

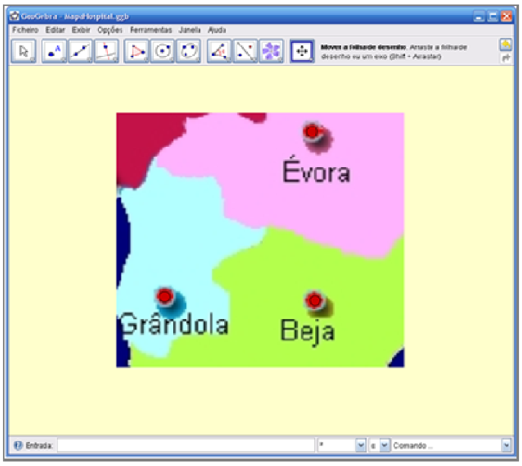


Figura 18 – Ficheiro MapaHospital.ggb.

5.ª Aula (22 de Março de 2010)

Ficha n.º 13

Utilizem o material de desenho que considerarem necessário para resolver as tarefas que se seguem.

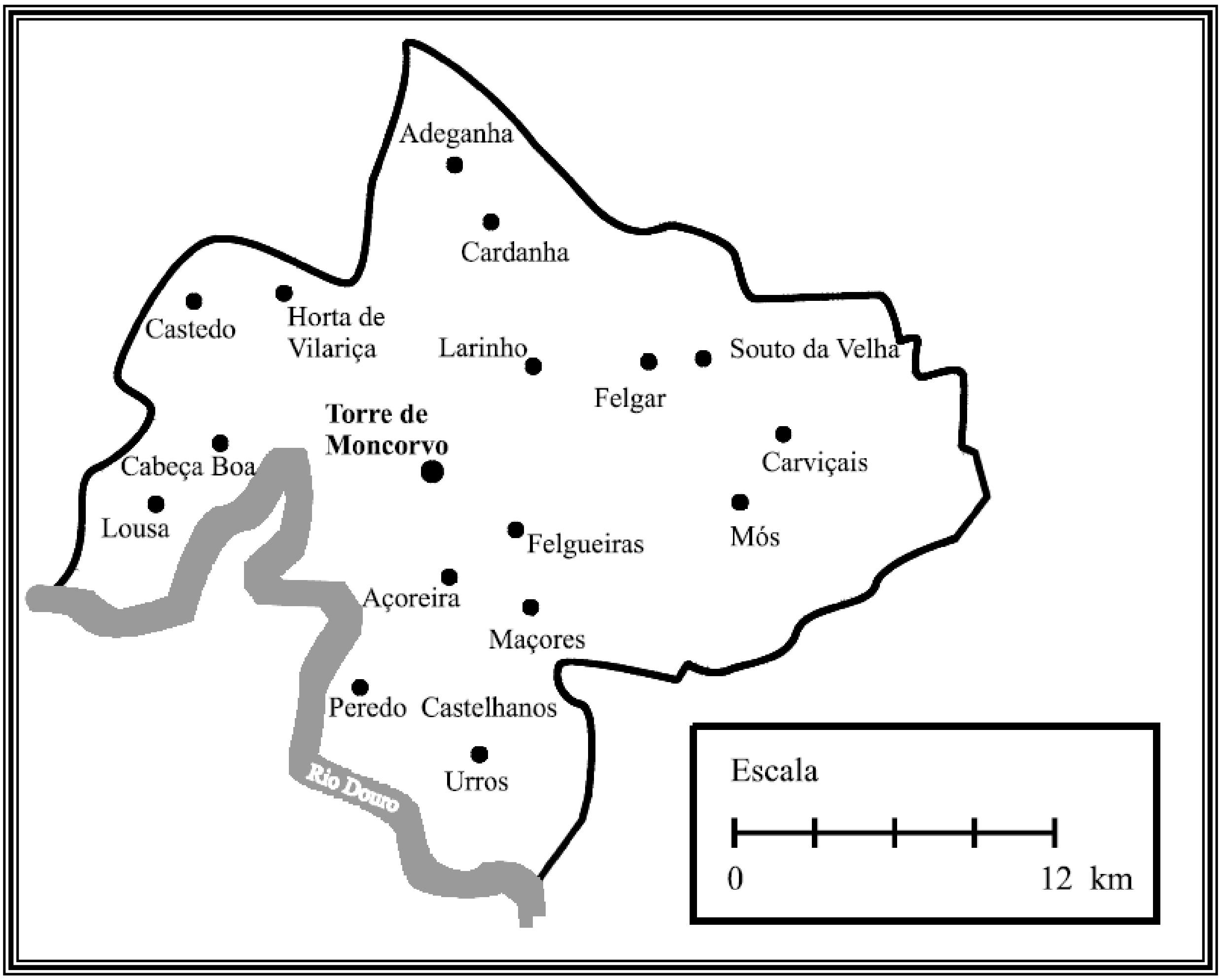
1. A Celeste, a Violeta e o Luís combinaram encontrar-se no Parque das Nações.

1.1. A Celeste foi a primeira a chegar ao Parque das Nações. A Violeta chegou à Gare do Oriente e esperou durante alguns minutos no ponto assinalado no mapa (Piso térreo da Gare do Oriente). Farta de esperar, foi à procura da sua amiga, acabando por se perder. Decidiu, então, telefonar à Celeste dizendo-lhe: "Estou um pouco perdida! Acho que me afastei da Gare pelo menos 25 metros, mas não me afastei mais de 50, podes vir ter comigo?"

Onde deve a Celeste procurar a sua amiga? (Representem esse(s) local(ais) na figura abaixo.)

1.2. Depois das duas amigas estarem juntas, o Luís telefonou-lhes dizendo que estava a menos de 50 metros da paragem de autocarro. Mas a Celeste e a Violeta não se conseguiam lembrar se ele vinha no autocarro da paragem A, ou da B. Onde devem as duas amigas procurar o Luís? (Representem esse(s) local(ais) na figura abaixo.)

2. Um grupo de amigos quer visitar a torre de vigia de incêndios da Serra do Reboredo que fica no concelho de Torre de Moncorvo. A torre de vigia não está marcada no mapa, mas eles sabem que está localizada a 9 km de distância de Peredo Castelhanos, a 12 km de distância de Adeganha, e fica mais perto de Felgueiras do que de Cabeça Boa.



Conseguem ajudar este grupo de amigos a descobrir onde se situa a torre de vigia de incêndios da Serra do Reboredo? Assinalem-na no mapa acima e justifiquem a vossa resposta.

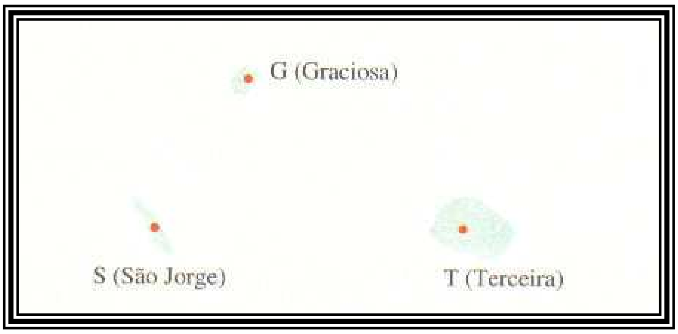
(Adaptado de: http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=9&fileName=M3Ceb8_ec_vv.pdf.)

6.ª Aula (25 de Março de 2010)

Página 89 (manual)

63. S.O.S.

Um barco está em apuros perto das ilhas dos Açores.



1.ª testemunha: eu vi o barco em dificuldades mais próximo da ilha Graciosa (representada na figura pelo ponto **G**) do que da ilha Terceira (**T**).

2.ª testemunha: o barco está mais afastado da ilha Terceira que da linha de S. Jorge (**S**).

Pinta a azul a zona onde devem ser efectuadas as buscas para encontrar o barco.

Anexo III - Questionário

No estudo do tema Lugares Geométricos foram usados dois tipos de recursos para realizar as tarefas propostas: o *GeoGebra* e material de desenho.

1. Das tarefas matemáticas que realizaste nas aulas, houve alguma de que tivesses gostado particularmente? ☐ Sim. ☐ Não.

Explica a tua opinião:____

____

____

____

Se respondeste "Sim":

- Qual o recurso utilizado para realizar essa tarefa?

☐ *GeoGebra*. ☐ Material de desenho.

2. Indica alguns aspectos positivos da utilização de material de desenho (compasso, lápis e régua) na realização de tarefas do tema Lugares Geométricos.

- ____
- ____
- ____

3. Indica alguns aspectos negativos da utilização de material de desenho (compasso, lápis e régua) na realização de tarefas do tema Lugares Geométricos.

- ____
- ____
- ____

4. Gostaste de utilizar o computador nas aulas de Matemática? ☐ Sim. ☐ Não.

Porquê?____

____

____

____

5. Gostaste de utilizar o *GeoGebra* para realizares tarefas do tema Lugares Geométricos?

☐ Sim. ☐ Não.

6. Achas que o *GeoGebra* é um programa de fácil utilização? ☐ Sim. ☐ Não.

Porquê?____

7. Indica alguns aspectos positivos da utilização do *GeoGebra* na realização de tarefas do tema Lugares Geométricos.

-
-
-

8. Indica alguns aspectos negativos da utilização do *GeoGebra* na realização de tarefas do tema Lugares Geométricos.

-
-
-

9. Comparando estes dois recursos, qual preferes utilizar para resolver problemas matemáticos?

☐ *GeoGebra*. ☐ Material de desenho. ☐ Não tenho preferência.

Porquê?____

10. Em relação à utilização do *GeoGebra*, consideras que:

- Permitiu desenvolver as estratégias em que pensaste.

☐ Sim. ☐ Não.

- Tem limitações que, nem sempre, permitiram desenvolver as estratégias que escolheste. ☐ Sim. ☐ Não.

- Poderia ser utilizado em mais tarefas relacionadas com a Geometria.

  ☐ Sim. ☐ Não.

- Gostarias de vir a ter mais oportunidades para utilizar e explorar este programa.

  ☐ Sim. ☐ Não.

11. Quando, durante este tema, te foi proposto um problema, sentiste que o recurso de que dispunhas condicionou a estratégia que seleccionaste para resolver o mesmo?

☐ Sim. ☐ Não.

Porquê?____

____

____

____

Anexo IV – Questão 15 do Teste Intermédio

A questão

15. Pretende-se construir um parque eólico, como o representado na figura ao lago.

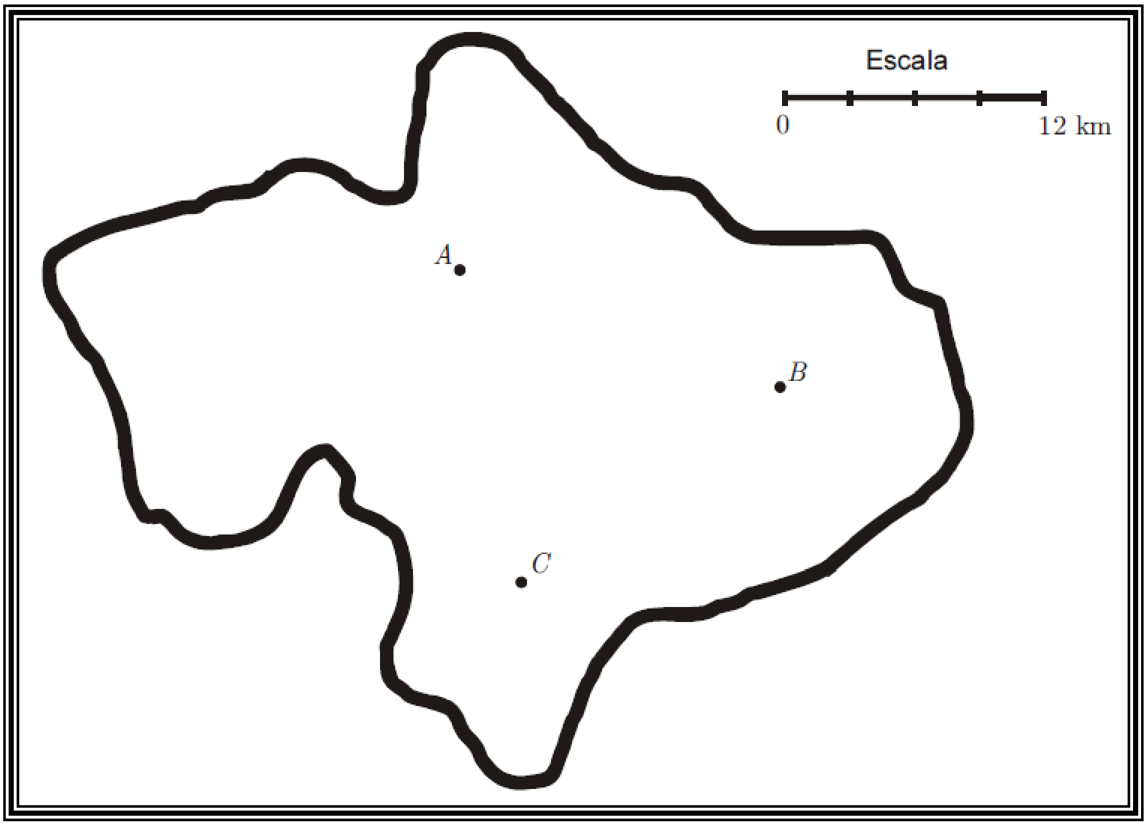
A figura abaixo é o mapa da zona onde estão a ser colocadas as colunas aerogeradoras.

Os pontos *A*, *B* e *C* representam a localização de três colunas. A localização da quarta coluna deve obedecer às seguintes condições:

• a coluna deve ficar dentro da zona delimitada pelo traço grosso;

• a coluna deve estar à mesma distância das colunas *B* e *C*;

• a coluna deve ficar a 12 km da coluna *A*.



Desenha a lápis, na figura acima, uma construção geométrica rigorosa que represente, no mapa, o ponto correspondente à localização da quarta coluna.

Assinala esse ponto com a letra *D*.

Nota – Se traçares linhas auxiliares, não as apagues.

Critérios de correcção da questão

A Questão 15 tem uma cotação total de **7 pontos**.

Para a localização do ponto, será necessário construir a mediatriz do segmento de recta de extremos nos pontos *B* e *C* e a circunferência (ou arco de circunferência) de centro no ponto *A* e de raio 4 *cm*.

No que se segue, de cada vez que se referir mediatriz e circunferência (ou arco de circunferência), serão as acima descritas.

A classificação deve ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

- Desenha, com rigor aproximado, a mediatriz e a circunferência (ou arco de circunferência), e assinala o ponto de intersecção que está dentro do mapa (**ver notas 1, 2** e **3**) ....7 pontos
- Desenha uma construção em que revela compreender que o ponto pedido é o ponto de intersecção da mediatriz com a circunferência (ou arco de circunferência), mas só desenha com rigor um dos elementos (**ver notas 1, 2** e **3**) .... 6 pontos
- Desenha, com rigor aproximado, só a mediatriz (**ver nota 1**) .... 4 pontos
- Desenha, com rigor aproximado, só a circunferência (**ver nota 1**) ......3 pontos
- Desenha, sem rigor, uma construção em que revela compreender que o ponto pedido é o ponto de intersecção da mediatriz com a circunferência (ou arco de circunferência) (**ver nota 3**) ....2 pontos
- Dá outra resposta .... 0 pontos

Notas:

1. Considera-se que o desenho é feito com rigor aproximado, se o comprimento do raio da circunferência que contém o lugar geométrico desenhado tiver um erro não superior a 0,2 *cm*, o ponto médio do segmento tiver um erro não superior a 0,2 *cm* e o ângulo que a mediatriz faz com o segmento estiver compreendido entre 85º e 95º.

2. Se o aluno não assinalar o ponto com a letra *D*, mas houver evidência de que o determinou, eventualmente, assinalando-o de outra forma, a sua resposta não deve ser desvalorizada.

3. Se o aluno assinalar os dois pontos de intersecção, a sua resposta deve ser desvalorizada em 1 ponto.

Grelha de classificação relativa à Questão 15

Os resultados, em percentagem, relativos à Questão 15 do Teste Intermédio de 27 de Abril de 2010, pela turma em estudo, estão representados no quadro abaixo.

Respostas com a classificação máxima	36 %
Respostas com classificação igual ou superior a 75 % da cotação	71 %
Respostas com classificação inferior a 75 % e igual ou superior a 50 % da cotação	11 %
Respostas com classificação inferior a 50 % e igual ou superior a 25 % da cotação	4 %
Respostas com classificação inferior a 25 % da cotação	14 %
Resposta com classificação nula	14 %
Classificação média/cotação total	74 %

Quadro 5 **–** Grelha das percentagens das cotações da Questão 15 do Teste Intermédio.